THEORIE DES JEUX : UNE INTRODUCTION

Jacques-François Thisse

1. Introduction

1.1. Qu’est-ce qu’un jeu ?

La **théorie des jeux** est la discipline mathématique qui étudie les situations où le sort de chaque participant dépend non seulement des décisions qu’il prend mais également des décisions prises par d’autres participants. En conséquence, le choix “optimal” pour un participant dépend généralement de ce que font les autres. Parce que chacun n’est pas totalement maître de son sort, on dit que les participants se trouvent en situation d’*interaction stratégique*. Le mot stratégie vient du grec ancien où il désignait les actions prises par un chef militaire en campagne. Il a gardé ce sens. Toutefois son acceptation s’est élargie pour couvrir des situations moins belliqueuses, mais dans lesquelles persiste l’idée de conflit. Si les ressources sont rares, il y a obligatoirement conflit sur la manière de les répartir. Dès lors, on peut voir les marchés comme des jeux où les participants sont des producteurs et des consommateurs. Plus généralement, une partie d’échecs, la formation d’une coalition gouvernementale ou une négociation au sein de l’OMC sont autant de jeux différents obéissant à des règles spécifiques. Les jeux peuvent donc décrire des situations sociales très différentes.

Les participants à un jeu sont appelés **joueurs** (*players*). Chaque joueur – une entreprise, un consommateur ou un gouvernement – agit pour son propre compte selon le principe de rationalité économique. Ce principe stipule que chacun cherche à prendre les meilleures décisions pour lui-même; il ne fait pas référence à une rationalité qui transcenderait les participants et le jeu dans lequel ils opèrent. La rationalité dont il est question ici est celle d’un joueur d’échecs qui désire gagner la partie et qui, pour cela, emploie les moyens qui lui paraissent les meilleurs. Pour le producteur, il s’agira de maximiser son profit face à des concurrents en choisissant, par exemple, le meilleur prix de vente. Le consommateur cherchera quant à lui à acquérir le bien qui l’intéresse au prix le plus bas après un marchandage avec le vendeur. Cette recherche du seul intérêt personnel distingue la théorie des jeux de la théorie des équipes où les participants poursuivent par hypothèse un objectif commun.

La théorie des jeux fut fondée par von Neumann et Morgenstern en 1944 lors de la parution de leur ouvrage *Theory of Games and Economic Behavior* Bien sûr, il y eut des précurseurs; parmi les principaux, il faut citer Cournot et Edgeworth. Toutefois, c'est depuis la publication du livre de von Neumann et Morgenstern que la théorie des jeux est véritablement considérée comme une nouvelle discipline. Ces deux auteurs ont proposé une solution dans le cas particulier d'un jeu où le gain d'un joueur correspond exactement à la perte subie par l'autre (jeu à somme nulle ou duel). Le jeu d'échecs est un exemple de jeu où l'antagonisme entre joueurs est ainsi poussé à l'extrême. Les cas d'application en économie sont rares. En 1951, Nash a montré comment les idées développées par Cournot dès 1838 pouvaient servir de base pour construire une théorie de l'équilibre non coopératif pour des jeux à somme variable, qui généralise la solution proposée par von Neumann et Morgenstern. Les applications de ce concept à l'économie se sont multipliées à partir des années 70 et 80. C'est en économie industrielle que l'intérêt de ce concept est apparu avec le plus de force parce qu'il permet d'étudier des situations de concurrence imparfaite où les entreprises adoptent des comportements stratégiques. Le concept de coeur, anticipé par Edgeworth en 1881, a été systématisé par Gillies en 1953 et appliqué à la théorie de l'équilibre général dans les années 60 et 70.[1]

1.2. Jeux non coopératifs et coopératifs

Comme on l'a vu, la caractéristique essentielle, fondamentale d'un jeu est que le gain réalisé par un joueur dépend de ses choix, mais aussi des choix effectués par les autres membres du groupe. Cette interdépendance stratégique est très différente de l'interdépendance étudiée au sein du modèle d'équilibre général d'Arrow-Debreu. Dans ce modèle, la totalité des interactions économiques sont résumées dans le

[1] Un excellent survol de ces contributions est donné par Jean Gabszewicz, "Théorie du noyau et de la concurrence imparfaite", *Recherches Economiques de Louvain*, vol. 36, 21-37, 1970.

système des prix. Chaque agent économique peut ainsi effectuer ses choix en prenant ces prix comme données, mais sans se préoccuper de ce que font les autres agents dont, à la limite, il peut même ignorer l'existence. En théorie des jeux, l'interaction qui relie les joueurs est beaucoup plus complexe. Tout d'abord, les joueurs se connaissent (ils savent combien il y a de participants et qui ils sont). Ensuite, ils ne peuvent pas se contenter de choisir leurs propres plans d'actions, en négligeant ce que font les autres. Ils doivent au contraire se faire une idée aussi précise que possible des plans choisis par les autres. Pour cela, la théorie admet : 1) que chaque joueur s'efforce de prendre les meilleures décisions pour lui-même et sait que les autres joueurs font de même, 2) que chacun sait qu'il en va de même pour tous les autres et ainsi de suite ad infinitum.

On convient de distinguer entre deux grandes familles de jeux : les jeux coopératifs et les jeux non coopératifs. Un jeu est **coopératif** lorsque des joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante (par exemple, sous la forme d'un contrat qui prévoit une sanction légale dans le cas du non respect de l'accord). On dit alors qu'ils forment une **coalition** dont les membres agissent de concert. Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque que les joueurs n'ont pas la possibilité de former des coalitions, le jeu est **non coopératif**. Par définition, dans un jeu non coopératif on spécifie toutes les options stratégiques offertes aux joueurs, alors que les contrats qui sous-tendent les coalitions dans un jeu coopératif ne sont pas décrits. Un tel jeu peut être défini de deux manières différentes mais équivalentes : stratégique (on dit aussi normale) et extensive. Un jeu en forme **stratégique** est une collection de **stratégies** décrivant les actions de chaque joueur dans toutes les situations concevables du jeu, ainsi que les **gains** (*payoffs*) que chacun obtient lorsque les stratégies de tous les joueurs sont connues. Seules certaines actions seront effectivement choisies et donc observées, tandis que les stratégies incluent des actions possibles qui ne sont pas choisies durant le jeu. Un jeu en forme **extensive** (on dit aussi développée) est défini par un arbre qui décrit comment le jeu est joué. Plus précisément, chaque sommet de l'arbre spécifie le (ou les) joueur(s) qui doit (doivent) choisir une action à ce moment du jeu ainsi que l'information dont chaque joueur dispose lors de la prise de décision; les gains que chaque joueur peut réaliser après avoir suivi un des chemins possibles au sein de l'arbre sont donnés aux sommets terminaux. En outre, les événements possibles et leurs probabilités peuvent aussi être associés à certains sommets de l'arbre; la "nature" n'est pas un joueur, mais elle choisit aléatoirement certaines actions à des moments particuliers du jeu. Dans un jeu en forme extensive, une stratégie est une collection de règles décrivant les choix de chaque joueur en fonction de son information. On peut associer un jeu en forme stratégique à tout jeu en forme extensive en combinant toutes les stratégies possibles et en évaluant les gains correspondants (on utilise les gains espérés lorsque la nature intervient dans le déroulement du jeu).

Remarques :

1. Cette description d'un jeu en forme extensive suppose que les ensembles d'actions sont finis.
2. La forme extensive permet une description "dynamique" du jeu parce qu'elle spécifie les séquences de décisions prises par les joueurs. En revanche, un jeu en forme stratégique est plus facile à manipuler et est donc plus souvent utilisée dans les applications.
3. L'arbre d'un jeu en forme extensive diffère d'un arbre de décision en théorie de l'incertitude parce que plusieurs décideurs y sont associés,

Une stratégie **pure** est une action, ou un plan d'actions, qui est choisie par chaque joueur avec certitude. Cette notion a été étendue à celle de stratégie **mixte** définie comme une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures. D'un point de vue formel, une stratégie mixte peut être vue comme une simple généralisation mathématique où l'on déconcentre la masse-unité entre plusieurs stratégies pures. En revanche, on peut s'interroger sur l'intuition économique qui sous-tend le concept de stratégie mixte ? Pourquoi un joueur aurait-il recours à un mécanisme aléatoire, qu'il choisit, auquel il remet son pouvoir de décision alors qu'il pourrait choisir directement ? Cette question sera discutée plus tard.

Le concept de rivalité est au centre de la théorie des jeux. Pour cette raison, cette théorie est capable d'étudier des phénomènes très différents. Toutefois, il est important de préciser d'emblée que la théorie des jeux ne fournit pas de solutions toutes faites. Elle constitue plutôt une *façon de penser* qui permet de mieux comprendre la nature des conflits possibles et de concevoir ce que pourrait être une solution acceptable et raisonnable. A côté de l'analyse économique qui offre des cas d'application de plus en plus nombreux, on peut citer la science politique où la théorie des jeux tend à devenir très répandue. Il existe d'autres disciplines où la théorie des jeux s'est avérée très utile: 1) la biologie quand on cherche à expliquer la cohabitation et la proportion de différents types d'espèces; 2) la philosophie sociale quand on vise à comprendre comment les individus membres d'une société régissent leurs relations sociales et construisent à cet effet des institutions particulières.

La théorie des jeux non coopératifs s'est avérée extrêmement riche pour l'analyse des comportements oligopolistiques des entreprises, des luttes d'influence entre groupes au sein d'une institution (par exemple une entreprise), des négociations internationales entre gouvernements ou encore de la concurrence électorale entre partis politiques. C'est cette théorie qui nous retiendra dans la suite de ce cours, parce qu'elle permet une description détaillée des mécanismes incitatifs qui guident le comportement des joueurs sur la base de leurs seuls objectifs personnels. Par exemple, on verra que certains contrats implicites alliant "le bâton et la carotte" peuvent amener les joueurs à se comporter de manière coopérative sans qu'ils aient à former une coalition. A cet égard, elle permet d'analyser de manière rigoureuse des situations de concurrence très différentes où les joueurs peuvent être des acteurs de nature très différente : des entreprises, des consommateurs, des conducteurs de véhicules, des gouvernements ou des partis politiques. En fait, la théorie de l'oligopole a souvent servi de motivation à l'introduction de concepts fondamentaux de la théorie des jeux. Dans son ouvrage de 1838, Cournot fut ainsi le premier à introduire le concept d'équilibre non coopératif dans le cas d'entreprises se concurrençant par les quantités. Lors d'une recension du livre de Cournot publiée en 1883, Bertrand devait objecter que les prix, et non les quantités, sont les stratégies naturelles des entreprises. La solution obtenue par Bertrand diffère complètement de celle trouvée par Cournot. Cette différence révèle que la spécification des stratégies est essentielle pour l'étude d'un jeu. Edgeworth montrait en 1897 la possibilité de non-existence d'un équilibre non coopératif en prix lorsque les entreprises sont soumises à des contraintes de capacité de production. Enfin, en modélisant la concurrence en produits et en prix, Hotelling introduisait en 1929 l'idée d'équilibre parfait qui occupe une place très importante dans les applications récentes de la théorie des jeux. On constate donc combien théorie des jeux et théorie de l'oligopole ont été intimement associées dès le début. Il n'est donc pas surprenant que les deux disciplines continuent d'entretenir des rapports étroits. Pourtant, la théorie des jeux a acquis le statut d'une discipline autonome tant ses développements et ses domaines d'application sont devenus nombreux et variés.

1.3. Définition d'un jeu en forme stratégique

Les éléments constitutifs d'un jeu $\mathbf{G}$ en forme stratégique sont les suivants :

(1) $\mathbf{N} = \{1 \cdots n\}$ est l'ensemble des joueurs.

On suppose que les joueurs sont en nombre fini. Un joueur quelconque est désigné par l'indice $\mathbf{i}$. L'extension au cas d'une infinité de joueurs ne pose pas de problèmes conceptuels particuliers.

(2) s_i désigne une stratégie du joueur $\mathbf{i} \in \mathbf{N}$.

Une stratégie décrit de manière précise tout ce qu'un joueur fait. Remarquons que s_i n'est pas nécessairement un nombre; ce peut être aussi un vecteur ou une fonction.

(3) $\mathbf{S_i}$ est l'ensemble des stratégies du joueur $\mathbf{i} \in \mathbf{N}$.

Cet ensemble décrit toutes les stratégies disponibles pour le joueur $\mathbf{i}$.

(4) $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_i, \cdots, s_n) \in \mathbf{S_1} \times \cdots \times \mathbf{S_i} \times \cdots \times \mathbf{S_n} \equiv S$ est une *issue* du jeu, c'est-à-dire une combinaison de stratégies à raison d'une stratégie par joueur. On désigne par $\mathbf{s_{-i}} \in \mathbf{S_{-i}}$ toutes les stratégies choisies sauf celle du joueur **i**.

(5) $u_i(\mathbf{s}) \in R$ est la fonction de gain du joueur $\mathbf{i} \in \mathbf{N}$.

Autrement dit, la "fonction d'objectif" du joueur **ii** dépend non seulement de sa stratégie s_i, mais aussi de celles des autres joueurs résumées dans $\mathbf{s_{-i}}$. Le joueur **i** préfère strictement l'issue **s** à l'issue $\mathbf{s}'$ si $u_i(\mathbf{s}) > u_i(\mathbf{s}')$. Si $u_i(\mathbf{s}) = u_i(\mathbf{s}')$, le joueur est indifférent entre les deux issues.

(6) Chaque joueur connaît les ensembles de stratégies et les fonctions de gains de tous les joueurs, y compris donc les siens.

Du fait de cette dernière hypothèse, on dit que le jeu est en **information complète**. Dans le cas contraire, le jeu est dit en **information incomplète**. Les joueurs ne connaissent certains éléments constitutifs du jeu qu'en termes de probabilité; par exemple, le joueur **i** ne connaît pas la fonction de gain du joueur **k** mais dispose d'une distribution de probabilité sur les fonctions possibles.

Un jeu à deux joueurs est à somme nulle si $u_1(\mathbf{s}) + u_2(\mathbf{s}) = 0$ quel que soit le profil de stratégies $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$. Dans ce cas, les gains d'un joueur sont égaux aux pertes de l'autre, de sorte que l'on peut dire que les joueurs sont des opposants au sens habituel de ce mot.

Pendant longtemps, la pénurie a caractérisé le marché des livres en théorie des jeux. Depuis quelques années, ceux-ci se sont multipliés, sans doute à cause du succès rencontré par cette discipline auprès des économistes. Parmi les nombreux livres de qualité, les trois ouvrages suivants vous sont recommandés :
- Binmore K , 1992, Fun and Games, Lexington, Mass., Heath.
- Gibbons R , 1992, A Primer in Game Theory, London, Harvester.
- McMillan J., 1992, Games, Strategies and Managers, Oxford, Oxford University

Press.

Ces ouvrages sont, pour l'essentiel, consacrés aux jeux non coopératifs. Le livre
- Friedman J. 1990, Game Theory with Applications to Economics, Oxford, Oxford University Press
contient également une introduction à la théorie des jeux coopératifs.[2]
En français, l'ouvrage
- Demange G. et J.-P. Ponssard, 1994, Théorie des jeux et analyse économique, Paris, Presses Universitaires de France
dispose pour l'instant d'une position de monopole. Comme il est fort bien fait, il est susceptible de la conserver un certain temps.

2. Jeux statiques en information complète

2.1. Le dilemme du prisonnier

On dit qu'un jeu est **statique** (*one-shot game*) lorsque les joueurs choisissent **simultanément** leurs actions et reçoivent ensuite leurs gains respectifs.

Parmi les jeux statiques, les jeux finis à deux joueurs occupent une place privilégiée parce qu'ils permettent une présentation simple et pédagogique des principales questions posées en théorie des jeux. Ils sont décrits sous la forme de matrices dans lesquelles le premier joueur joue verticalement, c'est-à-dire choisit une ligne de la matrice, et le second horizontalement en choisissant une colonne. On parle dans ce cas de jeux matriciels. Nous allons en étudier quelques exemples au cours de cette section.

[2] Dans un genre très différent, on consultera avec profit l'ouvrage *La société de cour* de Norbert Elias qui, bien que n'utilisant pas explicitement l'appareillage de la théorie des jeux, montre comment les concepts de cette théorie permettent une analyse fine de certaines structures sociales. En revanche, le roman de Francis Walder *Saint-Germain ou la négociation* met en lumière la complexité d'un véritable processus de négociation et le chemin que la théorie des jeux doit encore parcourir avant de pouvoir appréhener cette complexité dans toutes ses dimensions.

Exemple 1 : Pour commencer, on considère le jeu qui est sans doute le plus célèbre, à savoir le **dilemme du prisonnier**. On suppose que deux suspects sont interrogés séparément par la police pour une action délictueuse grave. La police ne dispose pas d'éléments de preuve suffisants pour obtenir la condamnation des prévenus pour l'acte dont ils sont accusés. L'aveu d'au moins l'un des deux est donc indispensable. La police propose à chaque accusé d'avouer, dans quel cas il sera relâché. S'il n'avoue pas mais que l'autre le fait, il écope d'une peine de prison de 15 ans. Si les deux avouent, ils peuvent espérer bénéficier de circonstances atténuantes et recevoir une peine de 8 ans chacun. Enfin, si aucun des deux n'avoue, ils seront condamnés pour des délits mineurs à 1 an de prison. La matrice des gains a donc la forme suivante.

	Avoue	N'avoue pas
Avoue	(-8;-8)	(0;-15)
N'avoue pas	(-15;0)	(-1;-1)

Existe-t-il une manière "naturelle" de jouer ce jeu ?

On remarque immédiatement qu'*Avouer* constitue une stratégie qui conduit toujours à une peine moins lourde que *Ne pas avouer*, et ce quel que soit le choix effectué par l'autre. Dès lors, il semble naturel de penser que chacun des prévenus va choisir cette stratégie dans l'intention de réduire sa peine. Le résultat est qu'ils vont tous les deux être condamné à 8 ans de prison, ce qui constitue malgré tout à une condamnation assez lourde. Dans ce jeu, la stratégie *Avouer* est "optimale" puisque, si l'importance de la condamnation dépend du comportement de l'autre prévenu, chaque joueur peut prendre sa décision sans avoir besoin de se faire une idée de ce que va faire l'autre.

Dans le dilemme du prisonnier, *Avouer* est une stratégie dominante pour les deux prévenus. Dans un jeu en forme stratégique, on dit qu'une stratégie $s'_i \in \mathbf{S_i}$ est **dominante** pour le joueur **i** si, quel que soit $\hat{s}_i \in \mathbf{S_i}$ et $\hat{s}_i \neq s'_i$, les inégalités

$$u_i(s'_i, \mathbf{s_{-i}}) \;\geq\; u_i(\hat{s}_i, \mathbf{s_{-i}})$$

sont satisfaites pour tout $\mathbf{s_{-i}} \in \mathbf{S_{-i}}$.

Si dans un jeu donné tous les joueurs disposent d'une stratégie dominante et qu'ils choisissent effectivement cette stratégie, le résultat du jeu est appelé **équilibre en stratégies dominantes**. Dans le dilemme du prisonnier, le couple (*Avouer, Avouer*) est un équilibre en stratégies dominantes.

On vient de voir qu'à l'équilibre en stratégies dominantes, les prévenus vont subir une peine de 8 ans. Toutefois, s'ils "coopéraient" en n'avouant rien, la condamnation qui leur serait appliquée serait beaucoup plus légère puisqu'elle serait de 1 an. Ce jeu, malgré sa très grande simplicité, met en évidence la contradiction qui sous-tend de nombreux conflits, à savoir que *les participants devraient souvent s'entendre plutôt que de se combattre.* (Bien entendu, toute coopération est exclue dans un jeu à somme nulle. Elle n'a de sens que dans des jeux à somme variable où la coopération permet à tous les participants d'obtenir des gains plus élevés). Il montre aussi pourquoi la coopération n'est pas facile à mettre en oeuvre : chaque prévenu est incité à avouer, c'est-à-dire à dévier unilatéralement de la solution coopérative, ce qui mine la stabilité de la coopération de l'intérieur. Nous verrons plus tard que différents mécanismes permettent aux deux joueurs de ne pas avouer et de sélectionner le résultat coopératif. Disons d'emblée que "la loi du silence", qui conduit à punir sévèrement celui qui accuse un autre, constitue justement un tel mécanisme. L'exemple des accusations portées pas certains *mafiosi* contre d'autres pour réduire leur propre peine montre cependant les limites de tels mécanismes. Le fait que la Mafia reste cependant puissante en montre aussi la force.

En outre, la mise en place de mécanisme permettant la coopération devient plus complexe lorsque le nombre de joueurs est élevé. Si ceux-ci sont des entreprises, on a coutume de penser en théorie économique que le "marché" est capable d'assurer cette coordination car on est vraisemblablement dans un contexte proche du modèle concurrentiel dont on peut, par ailleurs, montrer que la solution est socialement optimale au sens de Pareto. Les choses se compliquent singulièrement lorsqu'il n'existe pas de marchés par où faire transiter les interdépendances entre décideurs, comme par exemple dans les problèmes posés par le développement économique. Certains ont vu dans la planification une manière de résoudre le problème de coordination entre un grand nombre d'agents, mais ils ont négligé le rôle central joué par la transmission de l'information au sein de vastes structures centralisées.

Afin d'illustrer une fois de plus les forces en action dans le dilemme du prisonnier, je vous propose de participer au **jeu de la tirelire**. Deux étudiants sont choisis au hasard et le jeu suivant leur est proposé. Chacun a la possibilité de mettre 0 ou 100 francs dans une tirelire. Après que chaque étudiant ait pris sa décision sans connaître la décision de l'autre, le contenu de la tirelire est multiplié par 1.5 et réparti en deux parties égales entre les deux joueurs. Par hypothèse, ce jeu n'est disputé qu'une seule fois. Que vont faire les étudiants? Après avoir écrit la matrice des gains, ils vont constater que mettre 0 franc dans la tirelire est une stratégie dominante. Mettons-nous en effet à la place du joueur 1 qui tient le raisonnement suivant : "si 2 ne met rien dans la tirelire, il est optimal pour moi de ne rien mettre sinon je perdrais 25 francs; s'il dépose 100 francs, je gagne 75 francs si je ne mets rien, et 50 francs si je mets 100 francs. Par conséquent, dans les deux cas de figure, j'ai intérêt à ne rien mettre dans la tirelire".Si les deux étudiants suivent le même raisonnement, le résultat serait un gain nul pour chacun d'eux. Même s'ils se mettaient d'accord avant le début du jeu pour coopérer et mettre 100 francs, il reste "optimal" pour chacun de ne rien mettre dans la tirelire s'ils sont motivés par la recherche de leur seul intérêt personnel. C'est là bien sûr que l'on peut attaquer la solution proposée. Les étudiants ont, comme tout le monde, des préférences qui incluent d'autres variables que leur seul gain immédiat. Ils sont, par exemple, sensibles à ce que les autres vont penser d'eux et vont peut-être mettre 100 francs pour ne pas laisser voir qu'ils ont envie de "profiter de la situation". Soit. Mais en irait-il de même si l'anonymat leur était garanti durant le déroulement du jeu?

La logique qui se trouve derrière le dilemme du prisonnier est en fait puissante et nous interpelle dans bien des domaines. Elle suffit déjà à montrer qu'un groupe d'individus ne va pas nécessairement se comporter dans l'intérêt du groupe si chacun peut obtenir pour lui-même un résultat meilleur en choisissant pour son propre compte. D'où l'importance de disposer de normes sociales qui imposent un minimum de coopération entre individus et qui assurent la cohésion du groupe. Mais qui va choisir ces normes et quelles normes faut-il choisir ? Mis à part des situations extrêmes, il est souvent malaisé de donner une réponse satisfaisante à cette question. Elle est pourtant au centre de l'organisation de toute société. Dès que Vendredi rejoint Robinson Crusoé, se pose *la* question de savoir comment prendre les décisions concernant les deux hommes : de commun accord, en se basant sur l'opinion d'un seul, ou en les laissant vivre séparément sans qu'ils puissent bénéficier des avantages du travail en groupe.

Il est également intéressant d'observer que des individus de culture différente ou de sexe différent tendent à se comporter différemment face à un dilemme du prisonnier. Ainsi, aux Etats-Unis, des expériences faites avec des personnes choisies au hasard donnent à penser que l'Américain blanc est le moins coopératif tandis que l'Américaine noire est la plus coopérative. Dans d'autres régions du monde, on a observé que les étudiants choisissaient la stratégie qui se révèle la plus favorable pour les professeurs, lorsque le jeu implique un représentant des deux groupes. Il est peu vraisemblable qu'il en aille de même en Wallonie.

Enfin, il est tout à fait fondamental de rappeler qu'ici le dilemme du prisonnier n'est joué qu'une seule fois. Lorsque le jeu est répété plusieurs fois, les solutions possibles sont différentes comme on le verra au chapitre consacré aux jeux dynamiques. En particulier, la solution coopérative peut émerger comme résultat d'un processus interactif car chaque joueur a la possibilité de punir son adversaire si celui-ci ne respecte pas l'accord, ce qui n'est pas faisable dans un contexte statique.

2.2. Processus de dominance successive

L'existence d'un équilibre en stratégies dominantes est rare. Aussi doit-on souvent faire appel à d'autres manières de raisonner dans l'espoir de trouver une "solution" au jeu. Si joueur 1 possède une stratégie dominante, alors on peut s'attendre à ce qu'il choisisse cette stratégie; comme le joueur 2 est capable d'anticiper ce choix, il choisit alors sa meilleure stratégie contre la stratégie dominante du premier.

Exemple 2 : Considérons le **jeu des deux cochons rationnels**. Les joueurs sont deux cochons intelligents comme ceux de *La ferme des animaux* de George Orwell. Les deux cochons se trouvent à l'extrémité d'un couloir. Chacun peut actionner un levier pour que la nourriture soit disponible à l'autre extrémité du couloir. Le cochon qui actionne le levier doit courir pour atteindre l'autre extrémité, mais avant d'y arriver, l'autre cochon y est déjà et a consommé une partie de la nourriture libérée par l'action du levier. Il y a un cochon dominant (le joueur 1) et un cochon subordonné (le joueur 2), ce qui veut dire que le dominant peut toujours se garantir la nourriture qui reste une fois qu'il se trouve à l'endroit où la nourriture est disponible. Supposons qu'il y ait 6 unités de grains dans la réserve. Si le cochon subordonné actionne le levier, le cochon dominant mange les 6 unités car il arrive le premier sur les lieux; en revanche, si le cochon dominant actionne le levier, le cochon subordonné arrive le premier et est capable de consommer 5 unités avant l'arrivée du cochon dominant à qui il ne reste qu'une seule unité. Enfin, il faut décrire ce qui se passe si les deux cochons poussent le levier en même temps. On admet que les deux cochons partent aussitôt après et que le cochon subordonné court plus vite (peut-être parce qu'il est moins gros). Il consomme 2 unités de grain avant d'être rejoint par l'autre qui consomme alors les quatre unités restantes. Lorsqu'un cochon pousse le levier, il "consomme" pour son effort 0,5 unité de nourriture. Dès lors, la matrice des gains est facile à construire et est donnée ci-dessous.

	Pousse	Ne pousse pas
Pousse	(3,5=4-0,5; 1,5=2-0,5)	(0,5=1-0,5; 5)
Ne pousse pas	(6; -0,5)	(0; 0)

Ne pousse pas est une stratégie dominante pour le cochon subordonné. Si le cochon dominant anticipe qu'il est "optimal" pour l'autre de choisir cette stratégie, alors le dominant choisit de pousser le levier. Le "résultat" du jeu est alors (*Ne* *pousse pas, Pousse*) et les consommations de grain sont respectivement 5 et 0,5 unités de grain.

Remarques :

1. Il n'y a pas d'équilibre en stratégies dominantes dans ce jeu parce que la stratégie "optimale" pour le cochon dominant dépend de la stratégie choisie par le cochon subordonné : si celui-ci choisit *Pousse*, alors il a intérêt à choisir *Ne pousse pas*; s'il Choisit *Ne pousse pas*, le cochon dominant préfère *Pousse*. En d'autres termes, sa meilleure réponse varie avec le choix de l'autre. Si le cochon dominant anticipe que le cochon subordonné ne choisira pas la stratégie *Pousse*, il y a pourtant une "solution" au jeu. Néanmoins, cette solution suppose une démarche plus élaborée de la part du joueur 1 que dans le cas du dilemme du prisonnier : le cochon dominant doit être capable de se mettre à la place du cochon subordonné et de réaliser que *Ne pousse pas* est une stratégie dominante pour celui-ci. Les choses se compliquent encore lorsqu'aucun des deux joueurs ne possède de stratégie dominante (voir Exemple 3).
2. Des comportements "rationnels" conduisent parfois à une solution en apparence paradoxale : le cochon dominant presse le levier et le subordonné mange l'essentiel de la nourriture. Dans ce jeu, la faiblesse implique la force.

Exemple 3 :

	G	**M**	**D**
H	(4;3)	(5;1)	(6;2)
M	(2;1)	(8;4)	(3;6)
B	(3;0)	(9;6)	(2;8)

Dans ce jeu, l'ensemble des stratégies du joueur 1 est donné par le triplet $\{H, M, B\}$ tandis que celui de son rival est donné par $\{G, M, D\}$. Chaque cellule du tableau contient un couple de nombres. Le premier nombre correspond au gain du joueur

1 et le second à celui du joueur 2 pour le couple correspondant de stratégies. Par exemple, si 1 choisit H et 2 choisit D, 1 reçoit 6 tandis que 2 reçoit 2.

Il est clair que ce jeu ne possède pas de stratégies dominantes. Quelle solution peut-on espérer voir émerger ?

Remarquons pour commencer que M est une stratégie strictement dominée par D qui assure toujours au joueur 2 des gains plus élevés quel que soit le choix de 1 (notons cependant que D n'est pas une stratégie dominante). Dans ce cas, il est raisonnable de penser que le joueur 2 ne retiendra jamais la stratégie M. On décide donc (y compris le joueur 1) d'éliminer la stratégie M de la matrice. Cela étant fait, on remarque alors que, dans la matrice résultante, H est "devenue" une stratégie dominante pour le joueur 1. Dès lors, celui-ci devrait jouer H. Par hypothèse, le joueur 2 est capable de reconstruire ce raisonnement, de sorte que, anticipant le choix H de 1, il est "optimal" pour lui de choisir G. En conséquence, si chaque joueur est capable de raisonner comme nous venons de le faire, le "résultat" du jeu serait donné par le couple (H, G).

Le processus d'élimination qu'y vient d'être appliqué dans cet exemple est appelé **processus de dominance successive**. Il exige un comportement plus sophistiqué que celui prêté aux joueurs dans le dilemme du prisonnier, dans la mesure où chaque joueur doit être capable de reconstituer les opérations auxquelles l'autre procède et d'en déduire de nouvelles implications pour lui-même. Par exemple, 1 anticipe que 2 ne jouera pas M ce qui le conduit à réaliser que H est alors son meilleur choix. Sans cela, 1 ne pourrait pas réaliser que H devient une stratégie dominante.

Cet exemple fait apparaître un concept plus faible que celui de stratégie dominante, à savoir celui de stratégie strictement dominée. Formellement, on dit qu'une stratégie $s'_i \in \mathbf{S_i}$ est **strictement dominée** pour le joueur **i** s'il existe une autre stratégie $\hat{s}_i \in \mathbf{S_i}$ telle que :

$$u_i(\hat{s}_i, \mathbf{s_{-i}}) > u_i(s'_i, \mathbf{s_{-i}}) \text{ pour tout } \mathbf{s_{-i}} \in \mathbf{S_{-i}}.$$

On dit que s'_i est **faiblement dominée si** :

$$u_i(\hat{s}_i, \mathbf{s_{-i}}) \;\geq\; u_i(s'_i, \mathbf{s_{-i}}),$$

l'inégalité étant stricte pour au moins une combinaison $\mathbf{s_{-i}}$. Bien entendu, s'il existe une stratégie dominante pour un joueur, toutes les autres sont dominées et peuvent donc être éliminées en vertu du processus de dominance successive. Celui-ci est donc de nature plus générale et permet de proposer des solutions pour des jeux qui n'admettent pas d'équilibre en stratégies dominantes.

Toutefois, le processus de dominance successive admet également des limites.

Exemple 4 :

	G	**D**
H	(3;6)	(7;1)
M	(5;1)	(8;$\underline{\underline{2}}$)
B	(6;0)	(6;2)

Fig. A

	G	**D**
H	(3;6)	(7;1)
M	(5;1)	(8;$\underline{\underline{0}}$)
B	(6;0)	(6;2)

Fig. B

L'ensemble des stratégies de 1 est maintenant donné par $\{H, B\}$. Dans le cas du jeu décrit au tableau A, il est clair que H est strictement dominé par M. On décide donc de la négliger. On remarque que G est alors strictement dominé dès que H a été éliminé. Par conséquent, si 2 réalise que 1 ne choisira pas H, 2 peut éliminer G.

A son tour, 1 prend conscience de ce fait en reproduisant le raisonnement de 2 et en déduit que 2 va jouer D. Il est donc "optimal" pour 1 de jouer M. En résumé, les joueurs choisissent (M, D) et vont obtenir des gains donnés par (8,2). Considérons ensuite le jeu représenté par la matrice B. Les gains de 1 n'ont pas changé ; seul le gain de 2 a été modifié lorsque le couple (M, D) est sélectionné. Dès lors, la stratégie H peut toujours être éliminée. Toutefois, on ne peut plus aller plus loin car il n'y a plus de stratégie strictement dominée dans la matrice résultante. Cela revient à dire que, dans ce cas, le processus de dominance stricte ne conduit pas à un "résultat" unique. Le message est clair : *une modification mineure dans la matrice des gains peut conduire à des conclusions très différentes.*

Remarques :

1. L'emploi du processus de dominance successive ne conduit pas nécessairement à une solution unique, ce qui laisse donc subsister une indétermination quant au résultat du jeu. La convergence éventuelle du processus vers une solution unique peut dépendre de modifications mineures dans la structure des gains.
2. L'ordre d'élimination des stratégies strictement dominées n'a pas d'importance. Les stratégies qui subsistent après élimination sont les mêmes quelle que soit la séquence suivie. Il n'en va plus de même lorsque l'on élimine des stratégies faiblement dominées.

La "résolution" d'un jeu non coopératif par application successive de la dominance stricte semble donc fournir une solution satisfaisante quand elle conduit à une solution unique. Pourtant, la solution à laquelle conduit ce processus ne s'impose pas toujours de manière naturelle. Considérons en effet le jeu suivant :

	G	**D**
H	(8;10)	(-100;9)
B	(7;6)	(6;5)

Pour le joueur 1, D est strictement dominé. Après élimination de cette stratégie, B est strictement dominé pour le joueur 2. Dès lors, le résultat du jeu serait donné par (H, G). Toutefois, s'il a la moindre incertitude quant au comportement de 2, le joueur 1 pourrait se retrouver dans une situation catastrophique : s'il joue H tandis que 2 se trompe et joue D, 1 réalise une perte énorme. Dès lors, certains individus préfèrent jouer B qui leur garantit dans tous les cas un gain significatif et une perte relative assez faible par rapport à H. Cela correspond à ce que l'on peut appeler un comportement prudent.

En outre, l'approche en termes de stratégies dominantes/dominées peut aussi donner des résultats en apparence inattendus. Considérons par exemple le jeu représenté ci-dessous. Dans le premier cas de figure, H est une stratégie dominante pour le joueur 1. Le joueur 2 suppose que le joueur 1 va choisir H de sorte qu'il va jouer G. Le résultat final sera (H, G) et les gains correspondants (1,3). Supposons maintenant que la situation *a priori* du joueur 1 se détériore en ce que ses gains associés à la stratégie H sont réduits de 2 unités (voir les deuxièmes couples de la première ligne de la matrice). Dans ce cas, B est maintenant une stratégie dominante. Dès lors, 2 joue D et le résultat devient (B, D) avec les gains (3,4). Autrement dit, *le Joueur 1 obtient un gain final plus élevé en dépit d'une baisse partielle de ses gains.*

2 1	G	D
H	(1;3) (-1;3)	(4;1) (2;1)
B	(0;2)	(3;4)

2.3. Equilibre de Nash

Le processus de dominance successive ne conduit pas nécessairement à un résultat clair. Il apparaît donc nécessaire de disposer d'une solution dont les conditions d'existence soient plus faibles.

Exemple 5 : On considère le jeu décrit par la matrice suivante :

2 1	G	D
H	(0;0)	(2;2)
B	(10;11)	(-1;0)

Il n'y a de stratégie dominante/dominée pour aucun des deux joueurs. Si 1 joue H, alors il est optimal pour 2 de jouer D; si 1 joue B, il est optimal pour 2 de jouer G. De la même manière, si 2 joue G, il est optimal pour 1 de jouer B tandis que la meilleure réponse de 1 est H si 2 joue H. Toutefois, la paire (B, G) semble une solution raisonnable en ce qu'aucun joueur ne semble pouvoir faire mieux pour lui-même. Plus précisément, cette paire constitue ce que l'on appelle un équilibre de Nash : *chaque joueur maximise ses gains compte tenu de l'action supposée de l'autre.*

Dans les exemples 2 et 3, la solution qui résulte de l'application du processus de dominance successive est aussi un équilibre de Nash. Ce dernier peut cependant être défini indépendamment de ce processus dont il constitue dès lors une généralisation. On dit qu'une combinaison de stratégies $\mathbf{s}^*$ est un **équilibre de Nash** (ou un équilibre non coopératif) si l'inégalité suivante est satisfaite pour chaque joueur $\mathbf{i} = 1, 2, ...n$:

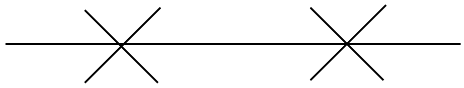
$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*) \text{ pour tout } s_i \in \mathbf{s_i}.$$

En d'autres termes, si le joueur $\mathbf{i}$ anticipe correctement que les autres participants au jeu vont choisir les stratégies associées à $\mathbf{s}_{-i}^*$, il maximise son gain en choisissant au sein de l'ensemble $\mathbf{S_i}$ la stratégie s_i^*. Cette propriété de stabilité (le joueur ne souhaite pas modifier sa décision) étant satisfaite pour chaque joueur, la solution décrite par l'équilibre de Nash capte ainsi l'idée intuitive de ce que l'on entend intuitivement par "équilibre".

Comment peut-on justifier le recours à l'équilibre de Nash comme solution possible d'un jeu non coopératif ? Une première réponse est de voir ce concept comme un ensemble de conditions raisonnables à imposer sur le comportement des participants au jeu : chaque joueur choisit la meilleure stratégie pour lui-même compte tenu des croyances qu'il a sur les stratégies qui vont être choisies par les autres. Etant donné sa capacité à se mettre à la place des autres et à reproduire leurs raisonnements, chaque joueur est à même de formuler des anticipations correctes. Dès que le jeu est terminé et que chacun en observe les résultats, il n'éprouve aucun regret car il n'aurait pas pu augmenter son gain en faisant un choix différent. *C'est au travers de la formation des croyances sur les choix stratégiques de chacun que s'exprime pleinement l'interdépendance stratégique qui relient les joueurs.* L'exactitude des croyances définit précisément les conditions pour la réalisation d'un équilibre de Nash. Dans le modèle concurrentiel, les agents n'ont pas besoin d'avoir des anticipations sur le comportement des autres; l'observation du système de prix suffit à chacun pour décider de ce qu'il doit faire.

Une seconde réponse consiste à imaginer que les joueurs se réunissent avant de jouer et discutent du choix d'une solution possible. Si les joueurs arrivent à un accord sur la façon de jouer et si chaque joueur est personnellement convaincu que les autres participants au jeu vont effectivement se comporter selon les règles de l'accord, alors il est "optimal" pour lui d'en suivre les recommandations car toute déviation unilatérale conduirait à un résultat qui lui serait moins favorable. Bien qu'il ne soit pas *a priori* contraignant, l'accord s'impose donc à chaque joueur considéré individuellement parce qu'il repose sur l'intérêt de chacun. Dans cette interprétation, l'interdépendance stratégique prend forme lors du processus qui permet la sélection d'un accord. De nouveau, dans le modèle concurrentiel, il n'est pas nécessaire de rechercher un tel accord; il résulte de l'existence de prix d'équilibre.

Remarque :



Il n'est peut-être pas inutile de préciser ici que dans la définition la plus courante d'un équilibre de Nash, où chaque joueur maximise son gain *étant donné* les stratégies des autres joueurs, l'expression "étant donné" renvoie aux anticipations qu'il se fait du choix des autres et non à leurs choix effectifs qui ne sont pas observables au moment où il sélectionne une stratégie puisque, par hypothèse, le jeu est simultané. Cette remarque est importante car certains auteurs ont critiqué l'équilibre de Nash sur la base d'une interprétation erronée de ce concept en arguant qu'il n'était pas réaliste de supposer que les autres joueurs ne réagiraient pas à un changement de la stratégie d'un d'entre eux. En théorie de l'oligopole, cette interprétation est connue sous le vocable de "variation conjecturale nulle". Il s'agit là d'une notion qui n'a de sens que dans un cadre dynamique car elle repose implicitement sur l'observation des stratégies effectivement choisies par les autres joueurs.[3]

Exemple 6 : L'interdépendance stratégique qui est résumée dans l'équilibre de Nash est illustré une nouvelle fois dans **le jeu des marchands de crème glacée** (ou jeu d'Hotelling). Imaginons une plage où deux marchands de crème glacée doivent s'installer en début de saison. Ils vendent leur produit à un prix fixé par le fabriquant, mais sont en revanche libres de choisir leur localisation. Les clients sont les touristes venant tous les jours se reposer à la plage. Afin de profiter au mieux du soleil, ils se répartissent à distance égale de leurs voisins. Les touristes n'aiment pas se déplacer à cause de l'encombrement de la plage. Dès lors, ils choisissent d'acheter auprès du vendeur le plus proche. Si les marchands sont conscients du comportement de leurs clients, comment vont-ils choisir leur emplacement sans avoir la possibilité d'observer le choix fait par l'autre. Mettons-nous à la place de 1 et supposons qu'il imagine une paire de localisation telle que celle représentée ci-dessous.

[3] A cet effet, on consultera avec profit l'article de L. Johansen "On the Status of the Nash Type of Noncooperative Equilibrium in Economic Theory", Scandinavian Journal of Economics, 84(1982), 421-441.

Il est évident qu'ils se partagent le marché de manière égale. "Etant donné" la localisation de 2, le joueur 1 se dit qu'il aurait pu faire beaucoup mieux en se rapprochant au maximum de 2; en effet, le point milieu qui segmente les deux marchés se déplacent vers la droite, très près de 2 lorsque que 1 choisit une localisation proche de 2 mais située sur sa gauche. Par conséquent, 1 en infère que la meilleure chose à faire pour lui est de se situer le plus près possible de 2, du côté où la plage est la plus longue. En effet, il maximise ainsi son nombre de clients et, donc, son profit. Mais où 2 va-t-il s'implanter ? Le joueur 1 doit réaliser que 2 tient le même raisonnement que lui ce qui signifie que la meilleure chose à faire pour 2 est de se placer le plus près possible de 1, du côté le plus long de la plage. Est-il possible de concilier ces aspirations respectives, c'est-à-dire de trouver un équilibre de Nash en localisation ? La réponse est positive : les deux marchands s'installent au milieu de la plage. Chacun obtient la moitié des clients. Si l'un d'entre eux avait choisi une autre localisation, il aurait attiré moins de clients, de sorte que la paire de localisations retenue est effectivement un équilibre de Nash. On vérifie aisément que cet équilibre est unique : toute autre paire de localisations conduirait au moins un des vendeurs à regretter son choix.

Dans ce jeu, chaque joueur doit se faire une idée précise de ce que veut faire l'autre. La solution proposée est donc plus *sophistiquée* que dans le cas du dilemme du prisonnier, qui ne réclame aucune croyance sur ce que veut faire l'autre, ou que dans celui des 2 cochons rationnels, où seul le cochon dominant doit se mettre à la place du cochon subordonné.

A l'équilibre de Nash, les deux vendeurs se localisent au centre de la plage. Cette solution n'est favorable aux acheteurs qui ne bénéficient pas des avantages liés à la dispersion géographique de l'offre. Si, au contraire, le choix des localisations était réglementé, il est évident que les deux marchands devraient s'installer au premier et troisième quartiles à savoir $1/4$ et $3/4$, si on suppose sans perte de généralité que la plage est de longueur unitaire. Autrement dit, la concurrence stratégique entre les vendeurs conduit à une configuration socialement sous-optimale.

Dans certains jeux, des combinaisons de stratégies semblent s'imposer d'elles-mêmes. On les appelle des *points focaux* parce qu'elles polarisent naturellement l'attention des joueurs. De tels points sont (souvent) des équilibres de Nash. Toutefois, les équilibres de Nash ne sont pas toujours des solutions "évidentes".

Exemple 7 : Considérons ainsi le jeu suivant :

2 1	 G	 D
H	(0;1)	(5;4)
B	(3;6)	(-1;0)

Dans ce nouveau jeu, (B, G) est encore un équilibre de Nash, mais celui-ci ne semble pas s'imposer avec la même force que dans les cas précédents. En outre, on peut vérifier que (H, D) est aussi un équilibre de Nash (comme c'était déjà la cas dans l'exemple 4). Dès lors, quel équilibre les joueurs vont-ils retenir ?

La multiplicité des équilibres est une des difficultés majeures rencontrées en théorie des jeux. L'exemple le plus célèbre est probablement celui de la **bataille des sexes**. Un couple discute des possibilités de sortie pour la soirée. Il y a deux possibilités : le théâtre ou un match de football. "Il" préfère le théâtre, "elle" préfère le foot. Toutefois, il est encore plus important pour les deux de passer la soirée ensemble. Tout ceci peut être résumé au sein de la matrice suivante où les nombres ne sont qu'indicatifs. Il y a deux équilibres de Nash donnés par (T, T) et (F, F). Comment choisir entre eux et donc à quelle issue peut-on s'attendre ?

	E L	 T	 F
3/4	T	(3;2)	(1;1)
1/4	F	(0;0)	(2;3)

Dans certains cas, un équilibre de Nash est plus efficace qu'un autre, en ce sens que chaque joueur y réalise un gain plus élevé. Il semble alors constituer un candidat naturel puisqu'une coordination minimale entre les joueurs suffit pour le sélectionner. Toutefois, cette coordination - même implicite - n'est pas dans l'esprit d'un jeu complètement non coopératif. En outre, si un joueur se trompe le résultat final peut se révéler catastrophique pour un participant comme le montre le cas suivant. Lorsque la structure des gains est donnée par la matrice ci-dessous, il a un risque considérable à choisir selon le critère parétien s'il y a une probabilité non nulle que l'autre joueur se trompe. En effet, puisque 2 réalise une perte importante dans le cas où 1 jouerait B au lieu de H, n'est-il pas plus raisonnable de s'attendre à ce que (B, D), avec les gains $(7, 7)$, émerge comme solution du jeu plutôt que (H, G) qui donne les gains $(9, 9)$.

2 1	G	D
H	(9;9)	(-100;8)
B	(8;-100)	(7;7)

Comme on l'a remarqué à l'occasion, par exemple, de la bataille des sexes, il peut exister *plusieurs* équilibres de Nash. Dans ce cas, se pose la question de savoir quel équilibre choisir ? Même lorsqu'un équilibre domine les autres, on vient de voir que l'emploi du critère parétien peut ne pas être satisfaisant. Il faut alors reconnaître que la spécification du jeu est, en un certain sens, incomplète. Des règles extérieures au jeu - telles que des conventions sociales - peuvent conduire à sélectionner une solution plutôt qu'une autre. Cela revient à admettre que des facteurs culturels sont susceptibles de jouer un rôle important dans l'émergence d'une solution particulière. Ainsi, le patriarcat ou la matriarcat peuvent constituer des éléments de réponse à l'indétermination que l'on observe dans la bataille des sexes. Plus généralement, on peut penser que l'existence de plusieurs équilibres est une des raisons qui explique la pluralité observée des normes sociales et des institutions. Le choix d'une norme ou d'une institution permet de sélectionner un équilibre particulier. La question fondamentale est alors de comprendre les liens qui relient "équilibres", d'une part et “normes sociales ” et “institutions”, d’autre part.

Dans certains cas, l’existence d’un point focal permet la sélection d’un équilibre de Nash particulier. Considérons ainsi le **jeu des villes**. On se donne une liste de villes (Berlin, Bonn, Budapest, Londres, Moscou, Paris, Prague, Varsovie et Washington) et on demande à deux joueurs de ranger ces villes en deux groupes, dont l’un doit contenir Washington et l’autre Moscou. Si les deux joueurs - qui ne peuvent se concerter - proposent la même partition des villes, ils gagnent chacun 100 francs et 0 sinon. Comment vont-ils dresser les deux listes ? Ce jeu possède un nombre élevé d’équilibres (de Nash) et la sélection d’un d’entre eux - qui donnent tous les mêmes gains - est malaisée à traiter. Si les joueurs sont encore influencés par la dichotomie OTAN/Pacte de Varsovie, ils peuvent penser assez spontanément à la partition suivante :

A = Moscou, Berlin, Budapest, Prague, Varsovie
B = Washington, Bonn, Londres, Paris

qui est effectivement un équilibre de Nash. Par conséquent, les deux joueurs vont gagner. Cependant, une telle issue devient beaucoup plus problématique si les joueurs accordent de moins en moins d’importance à la division ouest / est. Peut-être un autre critère va-t-il s’imposer dans le futur qui permettra l’émergence d’un autre point focal.

A côté de la multiplicité d’équilibres existe une autre difficulté : *il peut ne pas exister d’équilibre de Nash* (en stratégies pures) pour un jeu particulier. Un exemple bien connu est le jeu **matching pennies**. Deux joueurs annoncent simultanément pile ou face. Si les annonces sont identiques, le joueur 1 reçoit 100 francs que lui paie le joueur 2; si les annonces ne concordent pas, c’est 1 qui verse 100 francs à 2. La matrice des gains a évidemment la forme suivante.

2 1	P	F
P	(100;-100)	(-100;100)
F	(-100;100)	(100;-100)

Ce jeu, qui est un jeu à somme nulle, ne possède pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. Dès lors, on peut penser à utiliser un mécanisme aléatoire qui décide pour les joueurs. Toutefois, la nature du problème laisse penser que le choix du mécanisme aléatoire reste stratégique. Plus précisément, on suppose que chaque joueur choisit une loterie définie sur l'ensemble des stratégies pures : il associe une probabilité p_i (positive ou nulle) à la stratégie s_i et laisse au mécanisme aléatoire constitué par la composition des loteries le soin de choisir une stratégie pure. Dans une telle perspective, chaque joueur vise maintenant à maximiser ses gains espérés en choisissant la meilleure loterie possible, c'est-à-dire la meilleure stratégie mixte. Dans le jeu matching pennies, le joueur 1 a une probabilité x de choisir P et une probabilité $1-x$ de choisir F; pour le joueur 2, ces probabilités sont respectivement y et $1-y$. Le gain espéré du joueur 1 peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$xyu_1(P,P) + x(1-y)u_1(P,F) + (1-x)yu_1(f,P) + (1-x)(1-y)u_1(F,F).$$

Cette fonction est linéaire en x. Dès lors, la seule manière pour 1 d'avoir une probabilité x positive mais inférieure à l'unité est qu'il soit indifférent entre les stratégie pures P et F, ce qui implique que les coefficients de la probabilité x soient égaux qu'il choisisse P ou F :

$$yu_1(P,P) + (1-y)u_1(P,F) = yu_1(F,P) + (1-y)u_1(F,F)$$

ce qui équivaut à

$$y - (1-y) \;=\; -y + (1-y)$$

dont la solution est $y = 1/2$.

De la même manière, pour le joueur 2 on trouve $x = 1/2$.

Ce résultat est appelé **équilibre en stratégies mixtes**. Comme le jeu est à somme nulle, les gains espérés des joueurs sont égaux à l'équilibre. La matrice des gains étant symétrique, ils sont donc nuls.

Dans matching pennies, les stratégies mixtes d'équilibre sont identiques aux probabilités qui résultent de l'emploi par chaque joueur du mécanisme "choisir à pile ou face".

Remarque :

On a supposé dans cet exemple que les joueurs maximisent leurs gains espérés. On pourrait sans difficulté étendre l'approche pour intégrer différentes attitudes des joueurs envers le risque en supposant que les nombres donnés dans la matrice sont les utilités (par exemple, au sens de von Neuman-Morgenstern) des gains des joueurs.

On peut s'interroger sur l'intérêt qu'il y a pour les joueurs de faire appel à un mécanisme aléatoire puisque, à l'équilibre en stratégies mixtes, chaque joueur est indifférent entre choisir P ou F. En effet, quelle que soit la stratégie pure jouée, le gain espéré est nul. Toutefois, si un joueur décide de jouer une stratégie pure particulière, P disons, et que l'autre joueur s'en rend compte, alors ce dernier va choisir la stratégie pure qui maximise son propre gain et le premier joueur perdra 100 francs avec certitude. Il ne va donc pas courir ce risque et préférera utiliser le mécanisme aléatoire correspondant à l'équilibre en stratégies mixtes qui lui laisse l'espoir d'un gain positif. C'est un peu ce que font les inspecteurs du travail ou des contributions. Ils laissent planer le doute sur leurs intentions de sorte que chacun se sent *a priori* concerné par la possibilité d'un contrôle.

Une critique plus sévère de l'équilibre en stratégies mixtes est que les joueurs n'ont pas la possibilité de vérifier *ex post* que les stratégies jouées sont bien des stratégies d'équilibre puisque, en fin de compte, une seule stratégie pure est effectivement jouée par chaque joueur. Cette information ne suffit pas pour déterminer si les probabilités retenues constituent bien des stratégies d'équilibre: ces probabilités ne sont pas observables.

Revenons à la bataille des sexes où, nous l'avons vu, il existe deux équilibres de Nash en stratégies pures. Il en existe un troisième en stratégies mixtes auquel les deux joueurs peuvent avoir recours pour éviter l'indétermination associée au recours aux seules stratégies pures. Comme dans matching pennies, 1 doit être indifférent entre T et F, de sorte que

$$3y + (1-y) \;=\; 2(1-y) \;\Leftrightarrow\; 4y \;=\; 1 \;\Rightarrow\; y \;=\; 1/4.$$

Pour 2, on a

$$2x \;=\; x + 3(1-x) \;\Leftrightarrow\; 4x \;=\; 3 \;\Rightarrow\; x \;=\; 3/4.$$

En conséquence, le joueur 1 (lui), qui préfère le théâtre, met une probabilité plus élevée sur T que sur F; et inversement pour elle qui préfère le foot. Le gain espéré de chaque joueur est

$$Eu \;=\; (3/16).3 + (1/16).1 + (3/16).2 \;=\; 1.$$

Chaque joueur obtient moins en termes de gains espérés qu'à l'équilibre en stratégies pures qui lui est le plus défavorable. Toutefois, le mécanisme aléatoire présente l'avantage de placer les deux joueurs sur un pied d'égalité et, pour cette raison, pourrait être employé pour sortir de l'indétermination rencontrée avec les seules stratégies pures.

Dans un équilibre en stratégies mixtes, les joueurs choisissent leurs stratégies de manière *indépendante*. Supposons maintenant qu'ils aient la possibilité de communiquer avant que le jeu ne commence. Dans certains cas, les deux joueurs ont intérêt à se référer à un *signal* qu'ils peuvent observer séparément avant de choisir leur stratégie. De cette façon, les stratégies cessent d'être indépendantes et deviennent *corrélées*. Considérons l'exemple suivant.

2 1	G	D
H	(5;1)	(0;0)
B	(4;4)	(1;5)

Ce jeu admet les équilibres (H, G) et (B, D) en stratégies pures; il possède également un équilibre en stratégies mixtes donné par (1/2) et (1/2). Cet équilibre est calculé de la même manière que dans matching pennies; les gains espérés sont donnés par $(1/4).5 + (1/4).4 + (1/4)1 = 2.5$ pour chaque joueur. Cet équilibre (en stratégies mixtes) peut être retenu parce que les équilibres en stratégies pures donnent des gains opposés du point de vue de chaque joueur, de sorte qu'il pourrait s'avérer impossible d'en sélectionner un. En revanche, l'équilibre en stratégies mixtes assure des gains espérés égaux aux deux joueurs, qui sont aussi substantiellement supérieurs au gain du joueur le plus mal loti à un équilibre en stratégies pures.

Les joueurs ont pourtant la possibilité d'améliorer le résultat du jeu s'ils s'accordent sur un moyen permettant d'éliminer la paire (H, D) qui est mauvaise pour les deux joueurs. Comme le propose Aumann, on imagine qu'ils ont recours à un signal extérieur qui leur permet de corréler leur choix. Admettons, à titre d'exemple, que les deux joueurs soient d'accord pour s'en remettre à un mécanisme aléatoire qui conditionne leur choix, tel que "jouer à pile ou face" : si on observe face alors 1 joue H et 2 joue G; si on observe pile, alors 1 joue B et 2 joue D. On suppose bien entendu que les deux joueurs sont capables d'observer la réalisation de la variable aléatoire (ici pile ou face) avant de choisir une stratégie pure. Dès lors, en utilisant le conditionnement ci-dessus, l'espérance de gains de chaque joueur devient:

$$Eu_1 \;=\; Eu_2 \;=\; (1/2).5 + (1/2)1 \;=\; 3 > 2,5.$$

Par l'emploi de ce mécanisme de conditionnement, les deux joueurs éliminent la plus mauvaise combinaison de stratégies, soit (B, D), et se garantissent des gains espérés plus élevés. On peut montrer qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier.

Dans cet exemple, on a supposé une corrélation parfaite entre les signaux. En fait, il est possible de montrer que les joueurs peuvent faire encore mieux en utilisant des signaux imparfaitement corrélés et obtenir des gains espérés donnés par $(31/3, 31/3)$.

Un autre exemple de non existence d'un équilibre en stratégies pures est donné par le problème des marchands de crème glacée dans le cas de trois marchands. Si plusieurs marchands sont localisés au même endroit le long de la plage, il est raisonnable de penser qu'ils se partagent également les clients pour qui ils sont les vendeurs les plus proches. Considérons les deux cas de figure suivants. Si les trois marchands sont spatialement concentrés, chacun obtient un tiers de la clientèle; mais n'importe lequel d'entre eux qui se localiserait légèrement à l'écart des autres sur le plus long segment de marché accroitrait sensiblement son volume de vente. Dans le second cas, (au moins) un des marchands est séparé de ses deux concurrents et il peut augmenter ses ventes en choisissant une localisation plus proche d'eux. En d'autres termes, il n'existe pas de configuration de localisations stable. Par contre, on peut démontrer l'existence d'équilibres en stratégies mixtes; ces équilibres impliquent une masse de probabilité supérieure à $1/2$ autour du centre de la plage.[4]

3. Existence et unicité de l'équilibre de Nash

3.1. Existence

Comme le montre le jeu matching pennies ou le problème des trois marchands de crème glacée, un équilibre de Nash en stratégies pures n'existe pas nécessairement.

On peut cependant trouver des conditions suffisantes pour qu'un tel équilibre existe. Pour commencer, on définit la **meilleure réponse** (*best reply*) du joueur i par la correspondance de $\mathbf{S_{-i}}$ vers $\mathbf{S_i}$:

[4] On peut se référer à M.J.Osborne et C. Pitchik "The Nature of Equilibriurn in,a Location Model", International Economic Review, 27(1986), 223-237, pour une étude détaillée de ces équilibres.

$$r_i(\mathbf{s_{-i}}) = \text{argmax } u_i(s_i, \mathbf{s_{-i}}) \quad \text{pour tout } \mathbf{s_{-i}} \in \mathbf{S_{-i}}.$$

Dans le dilemme du prisonnier, la meilleure réponse de chaque joueur est indépendante de ce que fait l'autre. Cela reste vrai dès qu'il existe une stratégie strictement dominante.

Question 1 : Quand existe-t-il une meilleure réponse pour le joueur **i** ?

Lorsque l'ensemble des stratégies du joueur **i** est un ensemble compact et lorsque son gain est une fonction continue de s_i. Le théorème de Weierstrass implique alors l'existence d'un maximant.

Question 2 : La meilleure réponse est-elle une application ou une correspondance?

Une application numérique f définie sur $\mathbf{S}$ est dite *strictement quasi-concave* si $f(s_i, \mathbf{s_{-i}}) > \min\{f(s'_i, \mathbf{s_{-i}}), f(s"_i, \mathbf{s_{-i}})\}$ pour tout $s_i \in]s'_i, s"_i[$ (on dit aussi que les courbes d'indifférence sont strictirement convexes par rapport à l'origine).

Si u_i est strictement quasi-concave en s_i, alors la fonction de gain admet un seul maximant. Supposons au contraire que $u_i(s_i, \mathbf{s_{-i}})$ possède deux maximants s'_i et $s"_i$ pour $\mathbf{s_{-i}}$ donné et quelconque. Puisque u_i est strictement quasi-concave en s_i, on a

$$u_i(s_i, \mathbf{s_{-i}}) > \min\{u_i(s'_i, \mathbf{s_{-i}}), u_i(s"_i, \mathbf{s_{-i}})\}$$

pour tout $s_i \in]s'_i, s"_i[$ de sorte que s_i assurait des gains strictement plus élevés que le gain maximum, ce qui constitue une contradiction.

Dès lors, sous les hypothèses précédentes, $r_i(\mathbf{s_{-i}})$ est une application définie sur l'ensemble $\mathbf{S_{-i}}$, c'est-à-dire qu'il existe une meilleure réponse quelque soit le profil de stratégies choisies par les autres joueurs.

La plupart des preuves d'existence d'un équilibre repose sur un théorème de point fixe. On dit qu'une application f d'un ensemble X vers lui-même admet un *point fixe* si $x_0 \in X$ est sa propre image par $f : x_0 = f(x_0)$.

Considérons l'application $\mathbf{r}(\mathbf{s}) = (r_1(\mathbf{s_{-1}}), \cdots, r_n(\mathbf{s_{-n}}))$ de $\mathbf{S}$ vers $\mathbf{S}$. On a:

Lemme 1 *Si l'application $r(\mathbf{s})$ possède un point fixe, ce point est un équilibre de Nash du jeu, et réciproquement.*

1. Supposons que $\mathbf{s}^*$ soit un équilibre de Nash. Alors, pour tout $\mathbf{i} = 1, \cdots n$ on a $s_i^* = r_i(\mathbf{s}_{-i}^*)$ ce qui implique que $\mathbf{s}^*$ soit un point fixe de $\mathbf{r}(\mathbf{s})$.

2. Soit $\mathbf{s}^*$ un point fixe de $\mathbf{r}(\mathbf{s})$. Cela équivaut à dire que $s_{-i}^* = r_i(\mathbf{s}_{-i}^*)$ pour tout $\mathbf{i} = 1, \cdots, n$, de sorte que

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*)$$

ce qui signifie que $\mathbf{s}^*$ est un équilibre de Nash.

Un ensemble de conditions suffisantes pour qu'un point fixe existe est donné par le théorème de Brouwer qui s'énonce de la manière suivante : *soit* $\mathbf{f}$ *une application de C vers C où C est un sous-ensemble de* $\mathbf{R^n}$. *Si C est compact et convexe et si* $\mathbf{f}$ *est continu, alors* $\mathbf{f}$ *possède un point fixe.*

Illustrons ce théorème dans le cas d'une dimension. Soit f une application continue de $[a, b]$ vers $[a, b]$. Si f est continu, alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $x_0 = f(x_0)$ (géométriquement, cela revient à dire que la courbe décrite par $f(x)$ intersecte la diagonale du carré formé par le produit de l'intervalle avec lui-même). Supposons au contraire que f ne possède pas de point fixe. Alors pour tout $x \in [a, b]$, on a soit (1) $x > f(x)$ ou (2) $x < f(x)$. En effet, si on peut trouver deux points x' et x" dans $[a, b]$ tels que $x' < f(x')$ et x" $< f(x$"$)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait $x_0 \in [a, b]$ tel que $x_0 = f(x_0)$ puisque f est continu. Supposons tout d'abord que $x > f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Dans ce cas, on a $b > f(b)$ ce qui est impossible puisque $b \leq f(b)$. De même, si $x < f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, on a

$a < f(a)$, alors que $a \geq f(a)$ par définition de f. Dans les deux cas, il y a donc contradiction, de sorte que l'existence d'un point fixe est garantie.

Dans le cas à n dimensions, la démonstration de ce théorème est beaucoup plus complexe et ne peut être discutée ici.

En conséquence, si $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ est continu sur $\mathbf{S}$ et si les ensembles de stratégies sont compacts et convexes, $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ admet un point fixe et, par le Lemme 1, celui-ci est un équilibre de Nash.

Pour démontrer la continuité de $\mathbf{r}(\mathbf{s})$, on suppose que $u_i(\mathbf{s})$ est continu en $\mathbf{s}$ (et pas seulement en s_i). La démonstration se fait par l'absurde. Supposons que $r_i(\mathbf{s})$ ne soit pas continu. Dès lors, il existe une suite $(\mathbf{s}^n_{-i})$ qui tend vers $\mathbf{s}^0_{-i}$ dans $\mathbf{S_{-i}}$ telle que $(r^n_i) = (r_i(\mathbf{s}^n_{-i}))$ ne converge pas vers $r^0_i \equiv r_i(\mathbf{s}^0_{-i})$ dans $\mathbf{S_i}$. Comme la suite (r^n_i) appartient au compact $\mathbf{S_i}$, elle contient une sous-suite $(r^{n_k}_i)$ qui converge vers r^1_i différent de r^0_i. Puisque r^0_i est la meilleure réponse de $\mathbf{i}$ contre $\mathbf{s}^0_{-i}$, on peut trouver ε positif tel que

$$u_i(r^0_i, \mathbf{s}^0_{-i}) - u_i(r^1_i, \mathbf{s}^0_{-i}) \ = \ 3\varepsilon. \tag{1}$$

En outre, comme $(r^{n_k}_i)$ converge vers r^1_i et que u_i est continu en $\mathbf{s}$ (et donc en $\mathbf{s}_i$), il existe n^* tel que pour tout $n_k > n^*$ les deux inégalités suivantes soient satisfaites:

$$\begin{gathered}|u_i(r^0_i, \mathbf{s}^{n_k}_{-i}) - u_i(r^0_i, \mathbf{s}^0_{-i})| < \varepsilon \\ |u_i(r^{nk}_i, \mathbf{s}^{n_k}_{-i}) - u_i(r^1_i, \mathbf{s}^0_{-i})| < \varepsilon\end{gathered}$$

de sorte que

$$u_i(r^0_i, \mathbf{s}^{n_k}_{-i}) + \varepsilon > u_i(r^0_i, \mathbf{s}^0_{-i}) \tag{2}$$

et

$$-\varepsilon + u_i(r_i^{nk}, \mathbf{s}_{-i}^{n_k}) < u_i(r_i^1, \mathbf{s}_{-i}^0) > u_i(r^{nk}, \mathbf{s}_{-i}^{n_k}) - \varepsilon \tag{3}$$

En introduisant (2) et (3) dans (1), on obtient

$$u_i(r_i^0, \mathbf{s}_{-i}^{n_k}) + \varepsilon - u_i(r_i^{n_k}, \mathbf{s}_{-i}^{n_k}) + \varepsilon > 3\varepsilon$$

ou encore

$$u_i(r_i^0, \mathbf{s}_{-i}^{n_k}) - u_i(r_i^{n_k}, \mathbf{S}_{-i}^{n_k}) > \varepsilon$$

ce qui implique que r_i^{nk} ne serait pas la meilleure réponse de $\mathbf{i}$ contre $\mathbf{s}_{-i}^{n_k}$. On a donc la contradiction cherchée et $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ est continu. En résumé, on a démontré le résultat suivant:

Théorème 2 *Si les ensembles de stratégie sont des sous-ensembles compacts et convexes de $\mathbf{R^n}$, et si la fonction de gain u_i est continu en $\mathbf{s}$ et strictement quasi-concave en s_i pour chaque joueur, alors le jeu non coopératif admet un équilibre de Nash en stratégies pures.*

Remarquons que l'on peut relâcher l'hypothèse de stricte quasi-concavité pour la remplacer par celle de quasi-concavité. Dans ce cas, il n'y a plus unicité des maximants, mais l'ensemble des maximants est convexe (la correspondance de meilleure réponse n'est plus une application mais une correspondance à image convexe).

Discutons brièvement la raison d'être des hypothèses du théorème. La continuité de u_i par rapport à s_i et la compacité de $\mathbf{S_i}$ sont supposées pour garantir l'existence d'un maximant de u_i dans $\mathbf{S_i}$. La stricte quasi-concavité par rapport à s_i et la convexité de $\mathbf{S_i}$ impliquent l'unicité du maximant. Enfin, la continuité de $u_i(\mathbf{s})$ par rapport à $\mathbf{s_{-i}}$ garantit, lorsqu'il y a quasi-concavité, que le maximant varie peu lorsque $\mathbf{s_{-i}}$ change peu. Toutes ces conditions impliquent que les courbes de meilleure réponse sont continues et, par conséquent, qu'elles s'intersectent. Comme on l'a vu, la stricte quasi-concavité peut être remplacée par la quasi-concavité. Il est malaisé d'aller plus loin, du moins à ce niveau de généralité, car si la fonction $u_i(\mathbf{s})$ est *multimodale*, les courbes de meilleure réponse ne sont plus nécessairement continues. Dans ce cas, elles peuvent ne pas s'intersecter et on n'est plus assuré de l'existence d'un équilibre de Nash (ou alors il faut imposer des restrictions sur la monotonicité des courbes de meilleure réponse).

Le théorème 2 a en outre une implication importante pour les jeux finis.

Théorème 2 *Tout jeu fini admet un équilibre en stratégies mixtes*

Démonstration :

Si le nombre de stratégies pures du joueur **i** est égale à m, une stratégie mixte pour ce joueur est un vecteur $(p_{i1}, ...p_{im})$ de probabilités. En conséquence, son ensemble de stratégies est donné par le simplex

$$\mathbf{s_i} = \{(p_{i1}, \cdots, p_{im}) : 0 \leq p_{ik} \leq 1 \text{ et } \sum p_{ik} = 1\}$$

qui est compact et convexe, tandis que sa fonction de gain est définie par l'espérance mathématique de gain

$$\sum_1 \cdots \sum_i \cdots \sum_n p_{1j} \cdots p_{nh} u_{j \cdots k \cdots h}$$

qui est linéaire dans les probabilités; elle est donc continue dans toutes les probabilités et quasi-concave en p_{ik}. Dès lors, les hypothèses du Théorème 2 sont satisfaites et il existe un équilibre en stratégies mixtes.

3.2. Unicité

Une fonction f de $C \in \mathbf{R^n}$ vers C est une *contraction* s'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que, pour tout x' et $x"$, on ait $d[f(x'), f(x")] \leq \lambda d(x', x")$.

Intuitivement, cela revient à supposer que "les images sont plus proches que les points de départ". De proche en proche, on converge vers une solution unique.

Théorème 4 *Si* $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ *est une contraction, alors l'équilibre de Nash est unique.*

Démonstration :

Supposons qu'il existe deux équilibres $\mathbf{s}'$ et $\mathbf{s}$", de sorte que $\mathbf{s}' = r(\mathbf{s}')$ et $\mathbf{s}" = \mathbf{r}(\mathbf{s}")$. Dès lors, on a

$$d(\mathbf{s}', \mathbf{s}") = d[\mathbf{r}(\mathbf{s}'), \mathbf{r}(\mathbf{s}")]. \tag{4}$$

Comme $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ est une contraction, on peut trouver $0 < \lambda < 1$ tel que

$$d[\mathbf{r}(\mathbf{s}'), \mathbf{r}(\mathbf{s}")] \leq \lambda d(\mathbf{s}', \mathbf{s}"),$$

ce qui contredit l'égalité (4).

Corollaire 5 *Si les courbes de meilleure réponse sont continûment différentiables et de pente inférieure à l'unité, alors* $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ *est une contraction.*

Démonstration :

Soit $\|\mathbf{x}\| = \max |x_i|$ la max-norme et d la métrique correspondante. Par le théorème des accroissement finis, on a :

$$\begin{aligned} d[\mathbf{r}(\mathbf{s}), \mathbf{r}(\mathbf{s}')] &= d[\mathbf{r}(\mathbf{s}), \mathbf{r}(\mathbf{s}) + \Delta \mathbf{r}'(\mathbf{s}_\Delta)] \\ &= \Delta \|\mathbf{r}'(\mathbf{s}_\Delta)\| \\ &< d(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \cdot \max |r_i'(\mathbf{s}_\Delta)| \\ &< \lambda d(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \end{aligned}$$

où $\Delta \in]0, d(\mathbf{s}, \mathbf{s}')[$ puisque $\max |r_i'(\mathbf{s}_\Delta)|)$ est borné supérieurement par un nombre inférieur à 1 quel que soit $\mathbf{s}$ et $\mathbf{i}$.

Les conditions suffisantes énoncées dans ce corollaire sont utilisées dans de nombreuses applications économiques. Il existe de nombreux jeux économiques où l'existence et l'unicité de l'équilibre de Nash sont vérifiées, mais sans que les conditions du Théorème 2 ou du Corollaire 5 soient satisfaites. Tel est le cas, par exemple, dans le problème des deux marchands de crème glacée. Toutefois, on ne peut pas dire que cela soit la règle: soit l'existence d'un équilibre, soit la multiplicité des équilibres restent des problèmes majeurs dans les applications économiques de la théorie des jeux.

3.3. Le modèle de Cournot

Les résultats précédents peuvent être employés pour étudier un des modèles les plus connus en économie industrielle, à savoir le **duopole de Cournot**. Imaginons une réserve d'eau minérale naturelle qui peut être exploitée à partir de deux sources différentes. Celles-ci se situent sur des terrains appartenant à deux propriétaires qui ne sont pas disposés à coopérer lors de la commercialisation de l'eau. On peut donc les considérer comme les participants d'un jeu non coopératif. Ils doivent décider simultanément de la quantité de bouteilles d'eau à mettre sur le marché. La fonction de demande inverse pour les bouteilles d'eau est donnée par

$$p(Q) = \max\{1 - (q_1 + q_2), 0\},$$

où q_1 et q_2 désignent le nombre de bouteilles offertes à la vente par les producteurs 1 et 2 et p le prix du marché auquel la quantité totale $Q = q_1 + q_2$ est écoulée auprès des consommateurs. Le coût de production d'une bouteille d'eau est identique pour les deux producteurs et égal à une constante $0 < c < 1$. La fonction de profit du vendeur **i** est alors donnée par :

$$\pi_i = q_i[p(Q) - c] \qquad \mathbf{i} = 1, 2.$$

Chaque joueur connaît sa fonction de profit ainsi que celle de son concurrent. En outre, il souhaite maximiser son profit en choisissant son volume de production et sait que son concurrent cherche à faire de même. Enfin, il sait que l'autre dispose de la même information le concernant.

En premier lieu, on vérifie si les hypothèses du Théorème 1 sont remplies. Tout d'abord, les ensembles de stratégies sont donnés par l'intervalle $[0, 1]$ qui est compact et convexe. En effet, aucun vendeur n'a intérêt à offrir une quantité supérieure à 1 car, quelle que soit la stratégie choisie par son concurrent, il réaliserait un profit nul. Ensuite, comme la fonction $p(Q)$ est continue en q_i et q_k, il en va de même pour la fonction de profit. Il reste à montrer que π_i est quasi-concave en q_i. Soit $\alpha \in R$. Si $p(Q)$ est positif, l'ensemble des stratégies q_i et q_k pour lesquelles $\pi_i \ (q_i, q_k) \geq \alpha$ est convexe car la fonction de profit est strictement concave en q_i et q_k. Si $p(Q)$ est nul, cet ensemble est encore convexe car la fonction de profit est maintenant égale à $-cq_i$ qui est concave. En conséquence, π_i est quasi-concave sur $[0, 1]$. Les conditions du théorème 1 sont donc satisfaites et il existe un équilibre de Nash en stratégies pures. Il est évident que tout équilibre est tel que les deux vendeurs réalisent des profits positifs. Cela implique que les conditions du premier ordre soient satisfaites comme des égalités. Dans le cas du joueur 1, cette condition exprime sa volonté de maximiser son profit; elle s'écrit

$$\partial\pi_1/\partial q_1 \ = \ 0. \tag{5}$$

Mais le joueur 1 sait que le joueur 2 cherche aussi à maximiser son propre profit. Il *simule* le comportement optimisateur de 2 en calculant sa condition du premier ordre

$$\partial\pi_2/\partial q_2 \ = \ 0. \tag{6}$$

Du point de vue du joueur 1, les équations (5) et (6) ont un statut différent : la première exprime son comportement optimisateur; la seconde représente une *hypothèse* que 1 fait sur le comportement de 2.

Mettons-nous maintenant à la place du joueur 2. Il tient exactement le même raisonnement, mais dans lequel les indices 1 et 2 sont inversés. En conséquence, les deux joueurs sont confrontés au même système d'équations simultanées, lequel traduit ici l'interdépendance stratégique de leurs décisions. On vérifie sans peine que ce système est donné par les deux équations suivantes :

$$1 - 2q_1 - q_2 \; = \; 0 \tag{7}$$

et

$$1 - q_1 - 2q_2 \; = \; 0 \tag{8}$$

qui admettent une solution unique donnée par

$$q_1^* \; = \; (1-c)/3 \text{ et } q_2^* = (1-c)/3. \tag{9}$$

Si 2 choisit de vendre une quantité q_2^*, il est alors optimal pour 1 de vendre q_1^*, et réciproquement. Comme, par hypothèse, le joueur 1 est capable de se mettre à la place de 2, il arrive à la même conclusion, à savoir qu'il est optimal pour 1 de vendre q_1^* si lui, le joueur 2, vend la quantité q_2^*. Dès lors, il y a une forte présomption que 2 pense que 1 va vendre q_1^*, ce qui implique que 2 va sans doute offrir une quantité q_2^*. Il en va de même, *mutatis mutandis*, pour 1 qui est donc incité à choisir q_i^*. Autrement dit, on constate que *les duopoleurs sont incités à se comporter comme le suggère l'équilibre de Nash*.

Le prix et les profits qui en résultent sont donnés par

$$p^* \; = \; (1+2c)/3 \;\; \text{et} \;\; \pi_i^C \; = \; (1-c)^2/9 \;\; \mathbf{i} = 1,2. \tag{10}$$

Comme les conditions du premier ordre (7) et (8) sont nécessaires et qu'elles n'admettent qu'une seule solution, l'équilibre de Nash est unique. De ces conditions, on peut également déterminer les courbes de meilleure réponse sur le domaine où les quantités sont positives :

$$r_1 \; = \; (1-q_2)/2 \;\; \text{et} \;\; r_2 \; = \; (1-q_1)/2$$

dont les pentes sont effectivement inférieures à l'unité comme le réclame le Corollaire 5.

Supposons maintenant que les deux vendeurs décident de se comporter de manière collusive et de maximiser leur profit joint. Le profit joint est évidemment le profit de monopole $\pi_M = Q[p(Q) - c]$. La maximisation de cette fonction par rapport à Q donne

$$Q_M = (1 - c)/2, p_M = (1 + c)/2et\pi_M = (1 - c)2/4.$$

Il reste à spécifier comment les vendeurs vont se partager ce profit. Cette question n'est en général pas simple à résoudre. Toutefois, dans le cas particulier qui nous retient, la symétrie du jeu fait qu'il est raisonnable de supposer qu'ils vont se partager ce profit de manière égale, de sorte que chaque vendeur réalise un profit égal à $(1 - c)^2/8$. On remarque que les profits et le prix de marché sont supérieurs à ceux obtenus à l'équilibre du duopole. *Ces résultats confirment l'intuition selon laquelle la concurrence entre deux entreprises est préférable à un monopole du point de vue des consommateurs.* En outre, ils suggèrent que les entreprises ont intérêt à s'entendre de manière à réduire les effets de la concurrence en vendant chacun $(1 - c)/4$ au lieu de $(1 - c)/3$. Mais qu'en est-il de la "stabilité" d'un tel accord entre les deux vendeurs ? Si le vendeur 1 est convaincu que le vendeur 2 va respecter l'accord et vendre une quantité $(1 - c)/4$, alors il n'a pas intérêt à respecter sa promesse. En effet, si q_2 est remplacé par cette valeur dans la fonction de profit du vendeur 1, on a

$$\pi_1 \ = \ q_1[1 - q_1 - (1 - c)/4]$$

qui est maximisée lorsque 1 choisit de vendre un montant égal à

$$q_1 \ = \ (3 + c)/8$$

qui est supérieure à $(1-c)/4$ (et même à $(1-c)/3$). En d'autres termes, le vendeur 1 profite du fait que 2 réduit son volume de vente pour accroître le sien et réalisé ainsi un profit plus élevé. Toutefois, si les deux vendeurs se trompent sur les intentions de l'autre, ils vont mettre sur le marché une quantité totale égale à $(3+c)/4$ et réaliser un profit $(3+c)(1-c)/32$ qui est inférieur au profit qu'ils font à l'équilibre de Nash. Cette situation rappelle le dilemme du prisonnier étudié à la section 2.1 : *les deux vendeurs ont un intérêt commun à coopérer, mais chacun est incité individuellement à ne pas respecter l'accord de coopération.*

Il existe une autre manière de "justifier" la solution proposée ci-dessus pour le duopole de Cournot, à savoir le processus de dominance successive étudié à la section 2.2. Par soucis de simplicité, on supposera que $c = 0$. Dans un premier temps, chaque vendeur constate qu'il n'a pas avantage à offrir une quantité supérieure à la quantité de monopole 1/2, et ce quelle que soit la quantité vendue par son rival, car autrement il réduirait son profit. On suppose que chaque vendeur est conscient de ce fait, ce qui le conduit à penser que son rival choisira dans l'ensemble de stratégies $[0, 1/2]$ puisque les stratégies appartenant à $]1/2, 1]$ sont strictement dominées. Le vendeur 1, disons, restreint ensuite le choix du vendeur 2 à l'intervalle $[1/4, 1/2]$ car il n'est jamais profitable pour 2 de vendre une quantité inférieure à 1/4; cette quantité est la meilleure réponse de 2 si 1 choisit 1/2 tandis que 1/2 est sa meilleure réponse lorsque 1 choisit 0. On suppose que 2 procède de la même manière. A la deuxième itération, chaque joueur élimine donc les stratégies appartenant à l'intervalle $[0, 1/4[$ de l'ensemble de stratégies de son concurrent parce qu'elles sont strictement dominées. A l'étape suivante, 1 réalise alors que 2 ne va jamais choisir une quantité excédant 3/8. C'est en effet la meilleure réponse de 2 si 1 venait à choisir 1/4. En d'autres termes, les stratégies appartenant à $]3/8, 1/2]$ sont strictement dominées du point de vue de 2 une fois que celui-ci est conscient que 1 va confiner son choix à $[1/4, 1/2]$. Il en va de même pour 2. En poursuivant ce raisonnement (avant que le jeu ne soit effectivement joué), on constate que chaque joueur élimine de nouveaux intervalles de stratégies et que ce processus converge vers le couple $(1/3, 1/3)$ qui est l'équilibre de Nash du duopole de Cournot quand le coût marginal de production est nul. Comme les ensembles de stratégies sont infinis, il faut une infinité d'itérations pour que le processus de dominance successive conduise à l'équilibre. Il est clair que la concavité du profit joue un rôle essentiel dans cette résolution du duopole de Cournot.[5]

Envisageons maintenant le cas plus général de n entreprises qui ont toutes le même coût marginal de production c. On a: $Q = \sum_i q_i$ et $\pi_i = q_i \cdot [p(Q) - c]$ pour tout $\mathbf{i} = 1, ...n$. L'existence et l'unicité de l'équilibre sont établies comme dans le cas du duopole. Les conditions du premier ordre sont les suivantes : $\partial\pi_i/\partial q_i = 0$ implique que $1 - \sum_{k \neq i} q_k - 2q_i = 0$. On a donc n équations à n inconnues. Du fait de la symétrie du système, il est raisonnable de penser que toutes les quantités sont égales, de sorte que

$$q_1^* \;=\; = \;q_n^* \;=\; (1-c)/(n+1)$$

qui généralisent les expressions obtenues dans le cas du monopole ($n = 1$) et du duopole ($n = 2$). Si n est considéré comme un nombre réel, on vérifie aisément que

$$Q^* \;=\; (1-c)n/(n-1) \;\text{ et }\; p^* \;=\; (1+nc)/(n+1).$$

De plus, comme $\partial p^*/\partial n = (c-1)/(n+1)^2 < 0$, on voit que *le prix d'équilibre décroît monotonément lorsque le nombre d'entreprises sur le marché augmente et tend vers le coût marginal de production quand le nombre de producteurs devient infiniment grand*. De même, on vérifie que les profits $\pi_i^* = (1-c)^2/(n+1)$ tendent vers zero (rappelons que les rendements sont constants) lorsque le nombre de firmes devient arbitrairement grand.

Une autre manière d'illustrer cette propriété est de calculer l'élasticité-prix à l'équilibre comme fonction de n :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p \;=\; -(dq_i/dp)(p^*/q_i^*) \;&=\; -(dQ/dp)(p^*/Q^*)(Q^*/q_i^*) \\
&=\; (p^*/Q^*)n \text{ puisque } dQ/dp = -1 \\
&=\; (1+nc)/(1-c)
\end{aligned}$$

qui tend vers l'infini avec n. En d'autres termes, lorsque le nombre d'entreprises

[5] Cf. Moulin H. "Dorninance Solvability and Cournot Stability", *Matematical Social Sciences*, 7(1984), 83-102.

devient arbitrairement grand, l'élasticité-prix de la demande d'une entreprise tend vers l'infini comme dans le modèle de concurrence parfaite. *Le modèle concurrentiel peut donc être vu comme la limite du modèle de Cournot.*

4. Jeux dynamiques en information complète

On suppose dorénavant que le jeu se déroule en plusieurs **étapes**. On admet également que toutes les actions passées sont *observables* et *connues* de tous les joueurs. Une étape peut correspondre à une période temporelle, mais cela ne doit pas obligatoirement être le cas. Les jeux dynamiques permettent de traiter deux aspects fondamentaux présents dans la réalité économique :

1. certains joueurs ont le pouvoir d'affecter directement les gains d'autres joueurs de manière irréversible parce qu'ils interviennent à des étapes antérieures du jeu ;
2. le temps est une composante essentielle dans la plupart des processus de décision et les étapes du jeu en sont souvent l'expression formelle.

Si la seconde observation ne réclame aucun commentaire tant elle est évidente, il n'est peut-être pas inutile d'illustrer la première au moyen de l'exemple suivant. Deux personnes sont devant un gâteau qu'elles doivent se partager. La première doit découper le gâteau en deux parties, pas nécessairement égales, tandis que la seconde choisit le morceau qu'elle préfère. Si elle a très faim, toute règle de bonne conduite sera oubliée et elle choisira le plus gros morceau. La première personne, si elle anticipe correctement le comportement de la seconde, comprend que la seule manière pour elle de se réserver le plus gros morceau possible est de découper le gâteau en deux parties strictement égales lors de la première étape. Lors de la seconde étape, les deux options offertes sont essentiellement les mêmes, de sorte que le choix du premier joueur contraint effectivement celui du second.

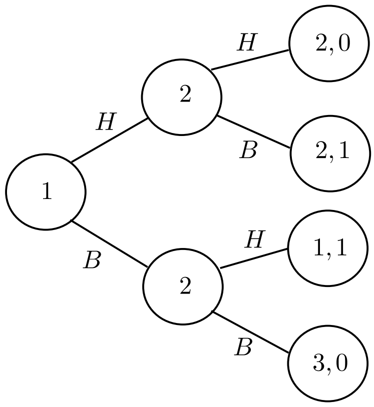
Dans un contexte dynamique, *une stratégie spécifie l'action que choisit chaque* *joueur à chague étape où il intervient en fonction de l'état du jeu qui prévaut en ce moment.* Autrement dit, le joueur choisit en tenant compte de l'histoire passée du jeu. Comme on le verra, la notion d'équilibre de Nash se généralise au cas des jeux dynamiques lorsque les stratégies sont définies comme elles le sont ci-dessus. Tout se passe alors *comme si* tous les joueurs effectuaient leurs choix une fois pour toute dès le début du jeu ; toutefois un tel comportement n'est pas nécessaire pour le déroulement du jeu.

4.1 Jeux en information parfaite

On distingue deux types de jeux dynamiques en information complète. Dans le premier, chaque joueur connaît l'ensemble des actions choisies par *tous* les joueurs qui sont intervenus avant qu'il ne sélectionne sa propre action. En d'autres termes, il est le seul joueur à prendre une décision à l'étape considérée. On dit alors qu'on a un jeu en *information parfaite* (le jeu d'échecs est un jeu en information parfaite). Dans le second, plusieurs joueurs choisissent leurs actions simultanément à une étape donnée du jeu. Ces actions ne sont pas connues et chacun des joueurs intervenant à cette étape se comporte un peu comme dans un jeu statique ; la différence essentielle réside dans l'histoire du jeu qui influence le choix de chacun. Il va sans dire que les premiers jeux sont plus "faciles" à traiter que les seconds.

Commençons donc par étudier l'exemple suivant (le jeu est décrit en forme extensive).

Il faut tout d'abord spécifier ce que sont les stratégies des joueurs. Pour le joueur 1, une stratégie consiste à choisir une action, H ou B. Pour le joueur 2, qui joue *après* 1, une stratégie est une *fonction* : $\mathbf{s_2}(\cdot) = [s_2(H), s_2(G)]$ définie sur l'ensemble des stratégies de 1. Comment doit-on jouer ce jeu ? Le principe consiste à raisonner en remontant par **induction vers l'amont**. *(backward induction).* Cela veut dire que l'*on raisonne en sens contraire de la manière dont le jeu va effectivement se dérouler.* Le joueur 1 se dit : "si je joue H, alors 2 va jouer B de sorte que mon



gain sera égal à 2 ; si je joue B, alors 2 joue H et mon gain est de 1". Dès lors, si 1 suppose que 2 choisit sa meilleure réponse à la seconde étape, il choisit H à la première. Pour ce qui est de 2, sa stratégie est effectivement sa meilleure réponse, à savoir $[s_2(H) = B, s_2(B) = H]$. En conséquence, $(H, S_2(H) = B, S_2(B) = H)$ est un équilibre de Nash car aucune déviation unilatérale n'est payante pour un joueur.

On admet que lorsque c'est le tour du joueur 2 de jouer, il choisit la meilleure action pour lui-même, à savoir $r_2(H) = B$ et $r_2(B) = H$. En conséquence, sachant que le joueur 2 se comporte de manière optimale à la seconde étape, *le joueur 1 intègre cette information dans son comportement et choisit une action optimale conditionnellement au comportement optimal de 2.*

Il est évident que le joueur 1 souhaiterait jouer B et souhaiterait que 2 joue B également. Toutefois, il n'est pas raisonnable de la part de 1 d'espérer un tel comportement une fois que 1 à joué B et que ce choix est observé par 2.

Un exemple de jeu dynamique bien connu en économie industrielle est constitué par le **duopole de Stackelberg**. On considère un environnement économique similaire à celui du duopole de Cournot mais on suppose maintenant que 1, disons, choisit sa quantité à la première étape et que, cette quantité étant observée, 2 choisit la sienne. En d'autres termes, une stratégie pour l'entreprise 1 est un volume de production q_1 tandis qu'une stratégie pour l'entreprise 2 est une fonction $s_2(q_1)$

dépendant de q_1 et spécifiant la quantité que l'entreprise 2 souhaite écouler sur le marché lorsque 1 retient q_1. Dans ce cas, on dit que l'entreprise 1 est le **meneur** (*leader*) et que la seconde est le **suiveur** (*follower*). En fait, il est facile de voir, qu'à la seconde étape, 2 va choisir sa meilleure réponse donnée par $r_2(q_1) = (1 - q_1)/2$. Sachant cela, 1 intègre cette fonction dans son profit qui devient

$$\pi_1 \ = \ q_1[1 - q_1 - (1 - q_1)/2]$$

de sorte que

$$d\pi_1/dq_1 \ = \ 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^S \ = \ 1/2 \quad \Rightarrow \quad r_1(q_1^S) \ = \ q_2^S \ = \ 1/4.$$

En conséquence, on obtient :

$$Q^S \ = \ 3/4 \ \text{ et } \ p^S = 1/4 \quad \Rightarrow \quad \pi_1^S = 1/8 \ \text{ et } \ \pi_2^S \ = \ 1/16.$$

Les deux entreprises ne réalisent pas le même profit, d'où la question de savoir qui va être le meneur et le suiveur.

Il est important de comprendre que les duopoles de Cournot et de Stackelberg correspondent à deux situations économiques différentes décrites par deux jeux différents. Il est inexact de présenter la solution du duopole de Stackelberg comme une "solution alternative" au duopole de Cournot. Dans ce dernier, les deux joueurs prennent leurs décisions simultanément, tandis qu'un joueur a la possibilité d'observer la décision de son rival avant de prendre sa propre décision dans le jeu de Stackelberg. Celui-ci est un jeu en information parfaite, à la différence du jeu de Cournot. Ce genre de distinction est essentielle en théorie des jeux et recouvre des mécanismes différents d'interaction. En revanche, le concept d'équilibre appliqué à ces deux jeux, à savoir l'équilibre de Nash, est le même dans les deux jeux.

Il existe des situations où l'ordre dans lequel les joueurs interviennent résulte de circonstances extérieures au jeu lui-même. Idéalement, il faudrait pouvoir endogénéiser les rôles. Dans certains jeux, 1 souhaite être le meneur et 2 le suiveur ; en outre, si les gains ainsi réalisés par chaque joueur dominent ceux qu'ils obtiendraient en jouant simultanément, la séquence retenue est une situation d'équilibre d'un jeu plus général où les joueurs choisissent pour commencer un rôle particulier. Ce n'est pas le cas ici puisqu'on a les inégalités $\pi_1^S > \pi_i^C > \pi_2^S$.

Il est intéressant de remarquer que les quantités d'équilibre du duopole de Cournot sont un équilibre de Nash du jeu à deux étapes. En effet, si 1 joue 1/3, la meilleure réponse de 2 est de jouer 1/3. En outre, si pour l'une ou l'autre raison, 1 pense que 2 va jouer 1/3, alors il est optimal pour lui de jouer 1/3. Dans ce cas, le joueur 2 réalise un gain supérieur au détriment du joueur 1 qui réalise un manque-à-gagner. En conséquence, 2 peut menacer 1 de jouer 1/3. Toutefois, cette menace n'est pas *crédible* : si 1 vend une quantité différente de 1/3, il est optimal pour 2 de vendre une quantité différente de 1/3 et *1 le sait.* Autrement dit, lorsque 2 est mis en face de la situation de mettre sa menace à l'oeuvre, il ne le fera pas. On remarque donc qu'il existe des équilibres de Nash qui impliquent l'emploi de menaces qui se révèlent non crédibles au fil du jeu. On verra bientôt comment de telles menaces peuvent être éliminées en introduisant un raffinement du concept d'équilibre de Nash, à savoir le concept de perfection.

En outre, il n'est pas vrai que chaque joueur souhaite être le meneur. Pour le voir, on considère une variante du jeu des deux marchands de crème glacée qui sont localisés aux deux extrémités de la plage mais libres de choisir leur prix de vente. Par hypothèse, tout baigneur supporte un coût de déplacement qui est une fonction linéaire de la distance parcourue (tx). Les fonctions de profit s'écrivent alors comme suit :

$$\pi_1 = p_1(p_2 - p_1 + t)/2t \quad \text{et} \quad \pi_2 = p_2(p_1 - p_2 + t)/2t.$$

Imaginons que l'entreprise 1 située à l'extrémité gauche de la plage soit le meneur. La fonction de meilleure réponse de l'entreprise 2 est donnée par

$$r_2(p_1) \;=\; (p_1 + t)/2.$$

Après remplacement de p_2 par $r_2(p_1)$ dans π_1, on obtient $p_1 = 3t/2$ et $p_2 = 5t/4$.

On vérifie alors aisément que le profit de 1 est égal à $9t/16$ tandis que celui de 2 est de $25t/32$. Le sort du suiveur est donc préférable à celui du meneur.

On peut démontrer le résultat suivant :

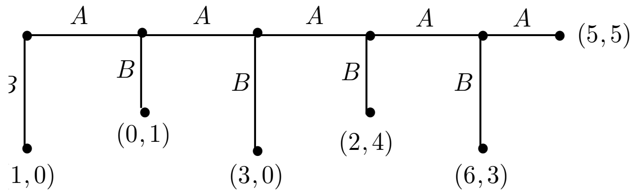
Théorème 6 *Tout jeu fini en information parfaite admet un équilibre de Nash en stratégie pure.*

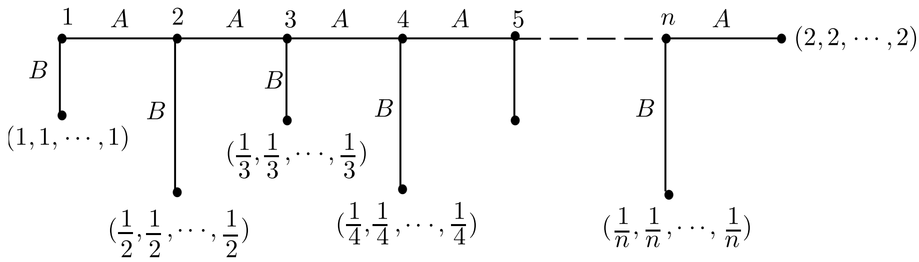
En théorie, cet équilibre peut être calculé en partant des sommets terminaux de l'arbre et en appliquant le principe d'induction vers l'amont. Plus précisément, on retient les sommets de l'arbre qui précèdent juste les sommets terminaux et on choisit pour chacun des joueurs l'action qui lui assure le gain le plus élevé. On considère ensuite les sommets dont les successeurs immédiats sont les avant-derniers. Chacun des joueurs sélectionne l'action qui lui assure le gain le plus élevé parmi les successeurs possibles, sachant comment il joue au tour suivant. Et ainsi de suite jusqu'au sommet initial.

Néanmoins, cette solution n'est pas complètement satisfaisante. Dans le jeu d'échecs, l'application du Théorème 6 réclame que chaque joueur soit capable d'effectuer la totalité des calculs qu'impliquent ce raisonnement. Il s'agit là d'une exigence qui dépasse la capacité de traitement de l'information des individus (et même des plus gros ordinateurs) tant le nombre de cas à considérer, bien que fini, est élevé.

D'autres difficultés surgissent lorsque l'on applique ce principe comme celles illustrées dans les deux jeux suivants. Dans le jeu en forme extensive décrit ci-dessous, deux joueurs ont le choix entre l'action A ou B.

Jouer B est optimal à chaque sommet de l'arbre. Dès lors, si l'on applique le principe d'induction vers l'amont le jeu s'arrête à la première étape après que le premier joueur ait choisi B. Pourtant, 1 pourrait vouloir jouer A aux fins d'envoyer un signal à 2. Si tel est le cas, comment 2 va-t-il se comporter ? Va-t-il automatiquement





choisir B ou, au contraire, choisir A dans l'espoir d'obtenir les gains $(5, 5)$. Dans un tel jeu, la formation des croyances sur le comportement de l'autre devient une composante essentielle de la manière dont le jeu se déroule et l'application du principe d'induction peut suggérer une solution différente de celle effectivement choisie par les deux joueurs.

Considérons maintenant le **jeu du mille-pattes** dans lequel n joueurs ont le choix entre A et B.

La solution donnée par le principe d'induction vers l'amont donne un équilibre unique où chaque joueur choisit A et réalise un gain égal à 2. Toutefois, si n est grand et si le joueur 1 place une probabilité $0 < p < 1$ que chaque joueur se conforte à la règle d'induction, alors la probabilité que cette solution soit effectivement choisie est égale p^{n-1} qui est arbitrairement petit lorsque n est grand, de sorte que le joueur 1 peut vouloir choisir B au lieu de A à la première étape s'il choisit un comportement prudent. De nouveau, le principe d'induction risque de ne pas être appliqué en pratique.

4.2 Le concept d'engagement

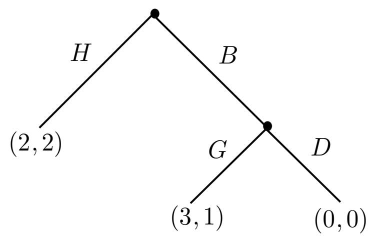
On a dit en début de chapitre qu'un joueur pouvait contraindre les choix d'un autre en prenant certaines décisions avant l'autre joueur. Pour être crédible, le joueur intervenant en premier lieu doit prendre un engagement irréversible (*commitment*). Cette idée est fondamentale dans l'étude des comportements des acteurs économiques. A première vue, il peut sembler absurde pour un joueur de se contraindre *a priori* puisque le fait de disposer d'un plus grand nombre de variables de décision semble constituer un avantage et que l'engagement conduit à réduire le nombre de ces variables. Ce qui est vrai dans un problème d'optimisation ne l'est pas nécessairement dans un environnement stratégique. Bien entendu, il serait faux de croire que tout engagement est toujours profitable pour celui qui le choisit. Pourtant, on rencontre de nombreuses situations économiques où les joueurs peuvent avoir intérêt à se contraindre d'emblée à ne pouvoir modifier leurs décisions. Considérons à titre d'exemple le jeu des marchands de crème glacée où le nombre de participants est supposé égal à quatre. On vérifie sans peine que le seul équilibre de Nash (en stratégies pures) du jeu statique est donné par deux marchands implantés en $1/4$ et par deux autres en $3/4$. Changeons maintenant les règles du jeu et supposons que les marchands s'établissent séquentiellement sur la plage. Par hypothèse, les coûts d'installation f sont compris entre $1/6$ et $1/4$ de sorte que chaque marchand peut réaliser un profit positif si les localisations sont choisies de manière appropriée. Les deux premiers arrivants disposent d'un avantage par rapport aux autres s'ils ont la possibilité (réelle dans les faits) de choisir une localisation une fois pour toute. En effet, dans ce cas, les deux premiers marchands vont s'implanter à une distance f de chacune des extrémités de façon à se garantir les clients correspondants. Si le troisième marchand se localise au milieu de la plage, alors le quatrième marchand ne dispose plus d'un segment de marché suffisamment grand pour pouvoir couvrir ses coûts d'installation. Quand bien même il se localiserait en $1/2$, il réaliserait un volume de vente égal à $1/4$ - $f/2$ qui est strictement inférieur à f puisque $f > 1/6$. Il décide par conséquent de pas entrer. On voit donc comment le comportement stratégique des trois premiers joueurs permet de bloquer l'entrée du quatrième. Cela n'est possible que dans la mesure où celui-ci considère les localisations des trois premiers établissements comme fixes. Autrement dit, en s'engageant stratégiquement, les trois premiers entrants se garantissent des profits plus élevés. L'engagement sur les localisations se révèle donc profitable.

4.3 L'équilibre parfait de Selten

On peut maintenant définir le cadre conceptuel général des jeux dynamiques. A cette fin, on désigne par a^τ le vecteur des actions choisies à l'étape τ du jeu par les participants qui interviennent à cette étape (rappelons que dans un jeu en information parfaite, un seul joueur intervient à chaque étape du jeu, maintenant, on permet à plusieurs joueurs d'intervenir simultanément). Soit t une étape quelconque du jeu. On définit l'**histoire** du jeu à l'étape $t, h^t = (a^0, a^1, \cdots a^{t-1})$, par la séquence de toutes les décisions prises par les joueurs intervenant lors des étapes antérieures $\tau = 0, 1, \cdots, t-1$. On suppose que tous les joueurs connaissent l'histoire du jeu à chaque étape. En d'autres termes, toutes les actions passées sont observables et connues par tous les participants (il n'y a pas de perte de mémoire). Le reste du jeu ($\tau > t$) est appelé **sous-jeu** $G(h^t)$. Puisque l'histoire h^t du jeu à chaque étape t est connue, le sous-jeu se déroulant à partir de t peut être vu comme un jeu à part entière induit par l'histoire h^t. L'histoire h^t impose des restrictions sur les choix offerts au joueur i. Soit $A_i(h^t)$ l'ensemble des actions auxquelles le joueur i a accès à l'étape t du jeu lorsque l'histoire est donnée par h^t. Comme cet ensemble dépend *a priori* de l'histoire du jeu, cela revient à supposer que ce joueur est contraint dans ses choix par les actions choisies dans le passé, aussi bien par lui-même que par les autres. Si $A_i(h^t)$ est vide, le joueur i n'intervient pas à l'étape considérée. La description des ensembles $A_i(h^t)$ à chaque étape t pour chaque joueur i fait partie de la spécification des règles du jeu. Soit encore H^t l'ensemble de toutes les histoires possibles jusqu'à l'étape t. On désigne alors par

$$A_i(H^t) \; = \; \bigcup_{h^t \in H^t} A_i(h^t)$$

l'ensemble de toutes les actions possibles pour le joueur i à l'étape t selon les histoires



possibles.

Nous sommes maintenant équipés pour définir une stratégie pure d'un jeu dynamique admettant T étapes (où T peut converger vers l'infini). Une **stratégie pure** pour le joueur i est définie par une suite de T applications S_i^t de H^t vers $A_i(H^t)$. En d'autres termes, une stratégie pure est une suite de règles de sélection d'une action particulière par le joueur i à chaque étape du jeu compte tenu de l'histoire qui s'est déroulée jusqu'alors. On remarque immédiatement la différence d'avec la définition d'une stratégie pure dans un jeu statique. Ici, la définition prend en compte les décisions choisies antérieurement et, de cette manière, permet une analyse dynamique des choix.

Un jeu dynamique peut admettre plusieurs équilibres de Nash (on l'a déjà remarqué dans le cas du duopole de Stackelberg). Toutefois, certains d'entre eux apparaissent comme plus raisonnables que d'autres. Considérons par exemple le jeu suivant défini en forme extensive.

Réécrivons ce jeu en forme stratégique (c'est-à-dire ici sous forme matricielle).

2 1	G	D
H	2,2	2,2
B	3,1	0,0

On vérifie aisément qu'il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures, à savoir (H, D) et (B, G). Toutefois, (H, D) n'est pas une solution raisonnable. En effet, le joueur 1 réalise que s'il joue B, alors le joueur 2 a intérêt à jouer G qui garantit au joueur 1 un gain égal à 3 qui est supérieur à 2. En d'autres termes, (H, D) ne devrait pas être retenu comme solution du jeu parce que D ne constitue pas une menace crédible pour le joueur 2.

De manière à écarter de telles solutions, on va se concentrer sur les équilibres de Nash qui sont des équilibres parfaits de Selten : à chaque étape t et pour chaque histoire h^t, l'équilibre parfait doit être un équilibre de Nash pour le sous-jeu résultant. Cette exigence supplémentaire (on parle de raffinement du concept d'équilibre de Nash) permet d'éliminer les équilibres qui impliquent des menaces non crédibles. En effet, quand on atteint le moment où un joueur doit effectuer un choix, il ne retiendra jamais une menace non crédible car celle-ci ne correspond pas à un équilibre de Nash du sous-jeu correspondant.

A chaque étape t, les stratégies du sous-jeu sont définies comme celles du jeu initial. La seule différence est que l'histoire à considérer pour les étapes $\tau = 0, 1, \cdots, t-1$ est donnée par h^t: ce sont donc des restrictions sur s_i imposées à l'histoire h^t. On dit alors que $S^* = (S_1^*, S_2^*, \cdots, S_n^*)$ est un **équilibre parfait de Selten** (*subgame perfect Nash equilibrium*) si, pour toute histoire h^t, la restriction $S^*|h^t$ est un équilibre de Nash du sous-jeu $G(h^t)$.

En fait, *la perfection au sens de Selten peut être vue comme une extension du principe d'induction vers l'amont dans laquelle il n'y a plus information parfaite parce que plusieurs joueurs peuvent choisir simultanément une action à certaines étapes du jeu.* Elle exige que les joueurs soient tous d'accord sur la manière de jouer quel que soit le sous-jeu considéré. Cela implique que tous les joueurs acceptent de se comporter comme le suggère la théorie quand bien même ils se trouveraient dans un sous-jeu qui ne correspond pas à ce que la théorie prédit : des joueurs se seraient "trompés" dans le passé mais on fait comme s'ils avaient appris ensuite à se comporter comme la théorie le recommande. En outre, les joueurs s'attendent aux *mêmes* équilibres. En effet, à la différence de ce que l'on observe dans les jeux en information parfaite, il peut exister plusieurs équilibres parfaits de Selten d'où le besoin d'employer de nouveaux raffinement de ce concept d'équilibre dans l'espoir d'arriver à une solution unique. Cet espoir est souvent vain et la multiplicité des équilibres ne doit pas être vue comme une faiblesse de la théorie mais plutôt comme une potentialité inhérente à l'analyse des comportements stratégiques.

A titre d'exemple, considérons le jeu suivant :

Il y a deux entreprises $i = 1$ et 2. A la première étape, la firme 1 peut décider d'un investissement f qui réduit son coût marginal de production $c > 0$ à la valeur 0. A la seconde étape, les deux firmes sont dans une situation de concurrence à la Cournot. Comment doit-on "résoudre" le jeu ? Comme dans le jeu de Stackelberg, on procède par induction vers l'amont en supposant 2 cas possibles: (1) l'entreprise 1 investit; (2) l'entreprise 1 n'investit pas. Dans le premier cas, on a :

$c = 0$ pour l'entreprise 1, d'où

$$\begin{aligned} \pi_1 &= pq_1 - f \Rightarrow r_1' = \frac{1-q_2}{2} \\ \pi_2 &= (p-c)q_2 \Rightarrow r_2' = \frac{1-c-q_1}{2}. \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que les quantités d'équilibre sont données par

$$q_1^*(1) = \frac{1+c}{3} \text{ et } q_2^*(1) = \frac{1-2c}{3}$$

d'où il résulte que le profit de l'entreprise 1 est dans ce cas égal à

$$\pi_1^*(1) = \frac{(1+c)^2}{9} - f.$$

Dans le second, les deux entreprises supportent un coût marginal égal à c et on sait que l'équilibre de Cournot est donné par

$$q_1^*(2) \;=\; q_2^*(2) \;=\; \frac{1-c}{3}$$
de sorte que le profit de l'entreprise 1 est maintenant égal à

$$\pi_1^*(2) \;=\; \frac{(1-c)^2}{9}$$

On a

$$\pi_1^*(1) > \pi_2^*(2) \;\Leftrightarrow\; \frac{(1+c)^2}{9} - f > \frac{(1-c)^2}{9} \Leftrightarrow c > \frac{9}{4}f.$$

Autrement dit, si f est suffisamment faible comparativement à la baisse de coût variable, la firme 1 investit dans la nouvelle technologie. Sinon, elle conserve l'ancienne technologie et supporte le coût c. L'équilibre parfait de Selten est alors donné par:

(a) si $c > 9f/4$, alors (i) l'entreprise 1 investit;

$$q_1^*(1) \;=\; \frac{1+c}{3}, q_2^*(1) \;=\; \frac{1-2c}{3} \;\text{ et }\; q_1^*(2) \;=\; q_2^*(2) \;=\; \frac{1-c}{3};$$
(b) si $c \leq 9f/4$, alors (i) l'entreprise 1 n'investit pas;

$$q_1^*(2) \;=\; q_2^*(2) \;=\; \frac{1-c}{3} \;\text{ et }\; q_1^*(1) \;=\; \frac{1+c}{3}, q_2^*(1) \;=\; \frac{1-2c}{3}.$$

Dans ce jeu, selon les valeurs de c et de f, il y a un chemin *unique* d'équilibre. Cette propriété n'est pas toujours vraie: il peut y avoir plusieurs chemins d'équilibre ce qui revient à dire que le concept de perfection ne suffit pas à sélectionner un seul résultat ("solution") dans un jeu dynamique.

5. Jeux répétés

Un **jeu répété** est un jeu dynamique où le jeu constitutif est le même à chaque période (ou étape). Ils constituent une classe particulière importante des jeux dynamiques. Considérons pour commencer le cas d'un horizon fini T. La fonction de gain du joueur i est le gain escompté sur l'ensemble des périodes, δ désignant le facteur d'escompte

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^{t-1} u_i(a_{it}). \tag{11}$$

Considérons le jeu constitutif décrit par la matrice suivante:

2 1	C	N
C	1,1	-1,2
N	2,-1	0,0

Dilemme du prisonnier

L'équilibre de Nash du jeu statique est (N, N). C'est aussi un équilibre du jeu répété dont les fonctions de gain sont données par (11). Si les deux joueurs s'accordent sur (C, C) durant les T périodes, chacun d'eux obtient $(1-\delta^T)/(1-\delta)$.

En fait, (N, N) est le seul équilibre parfait de Selten quand T est fini. En effet, à la période T les deux joueurs doivent réaliser que la menace de revenir à la solution (N, N) n'a plus de sens puisque le jeu s'arrête. En conséquence, les deux joueurs vont être tentés de jouer N, pour les mêmes raisons que celles rencontrées dans le cas du jeu statique. On se retrouve donc à la période $T-1$. Anticipant ce qui va se passer à la période T, les deux joueurs se retrouvent dans une situation similaire à celle que l'on vient d'évoquer. En poursuivant cette démarche, on constate que les deux joueurs vont finalement choisir de jouer N à chacune des étapes du jeu. Dans le cas présent, le caractère dynamique du jeu ne change rien à la solution proposée parce que la notion de menace (punition) n'a pas de réalité tangible. Expérimentalement, on constate cependant que les joueurs coopèrent souvent pour un nombre de périodes légèrement inférieur à T. Ce n'est que lorsque la période T n'est plus très éloignée que les joueurs dévient et cessent de coopérer. La théorie a donc ici un pouvoir prédictif faible. On peut y remédier en introduisant du bruit dans les gains des joueurs. Cela se fait dans le cadre des jeux en information incomplète que l'on ne peut aborder ici.

En revanche, si $T \to \infty$ il existe d'autres possibilités. Par exemple: on commence par coopérer à la période initiale et on continue à le faire si l'autre joueur n'a pas dévié au cours d'une des périodes précédentes. Si un joueur choisit de jouer N à la période t, alors les deux joueurs jouent N pour la suite du jeu. On appelle une telle stratégie une **stratégie de la gâchette** (*trigger strategy*). Plus précisément, on a:

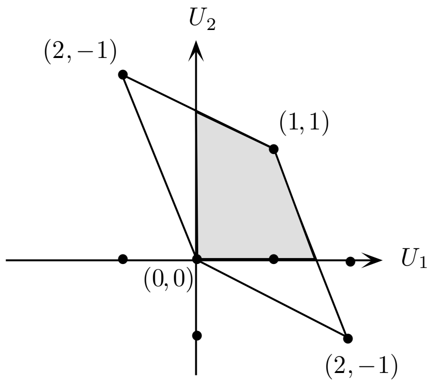
(i) Si aucun joueur ne dévie, les gains respectifs sont égaux et donnés par $\sum_{t=1}^{\delta} \delta^{t-1} \cdot 1 \ = \ 1/(1-\delta)$.

(ii) Si un joueur dévie à la période $t+1$, il obtient :

$1 + \delta + \cdots + \delta^{t-1} + 2\delta^t + 0 + \cdots = \frac{1-\delta^{t+1}}{1-\delta} + \delta^t \ = \ \frac{1-\delta^t(2\delta-1)}{1-\delta}$.

Si on compare les deux expressions, on constate qu'il n'est jamais désirable pour un joueur de dévier si et seulement si $\delta \geq 1/2$. Autrement dit, (C, C) est un équilibre parfait de Selten si $\delta \geq 1/2$, c'est-à-dire si la préférence pour le présent n'est pas très grande. *Le résultat coopératif est donc susceptible d'être soutenu comme un équilibre non coopératif du jeu répété.* Cela est possible parce que la répétition du jeu permet aux joueurs de sélectionner leur action courante sur la base de l'information rassemblée au cours des périodes précédentes et, si nécessaire, de mettre en place un mécanisme de punition. Toutefois, la solution (N, N) est également un équilibre parfait du jeu. Dès lors, on peut conclure que *la répétition du jeu permet, mais n'impose pas, la coopération.*

Plus généralement, on peut démontrer que tout profil de gains dont les valeurs sont supérieures aux gains minimax du jeu constitutif - qui sont ici donnés par 0 - peut être soutenu comme un équilibre de Nash du jeu répété si le facteur d'escompte



est suffisamment proche de l'unité. Ce sont donc des solutions coopératives, situées sur la frontière supérieure de la zone hachurée, mais aussi des solutions imparfaitement coopératives qui sont susceptibles d'être des équilibres du dilemme du prisonnier. Un jeu répété possède donc de "nombreux" équilibres différents de la (des) solution(s) coopérative(s).

Ce résultat est célèbre en théorie des jeux et porte le nom de **folk theorem** parce que ce résultat a été découvert plus ou moins simultanément par plusieurs auteurs. On peut l'énoncer de la manière suivante :

Théorème 7 *Soit a^* un équilibre de Nash du jeu statique dont les gains sont u^*. Alors, pour toute combinaison de gain u' telle que $u'_i > u^*_i, i = 1 \cdots n$, il existe $\delta^* < 1$ tel que pour tout $\delta > \delta^*$, on puisse trouver un équilibre parfait de Selten dont les gains correspondants sont donnés par u'.*

Démonstration:

Supposons que l'on puisse trouver un profil d'actions $\mathbf{a}'$ dont les gains correspondants soient donnés par $\mathbf{u}'$. A la période 1, le joueur i joue a'_i $(i = 1...n)$. A la période $t > 1$, le joueur i choisit l'action a'_i $(i = 1...n)$ si tel fut le cas pour tous les joueurs à chacune des périodes précédentes. Si au moins un joueur k ne choisit pas l'action a'_k qui lui est attribué dans le profil a' à la période $t \geq 1$, alors les joueurs jouent a^* durant toutes les périodes suivantes. Il s'agit bien d'un équilibre parfait pour δ suffisamment grand car

$$\max\{u_i(a); a_i \in A_i\} \ + \ \frac{u_i^*}{1-\delta} < \frac{u_i'}{1-\delta}$$

ou

$$(1-\delta)\max u_i(a) \ + \ \delta u_i^* < u_i'$$

pour le sous-jeu commençant à la période t et parce que la combinaison de stratégies proposée est parfaite pour l'ensemble de tous les sous-jeux possibles. QED

Considérons une fois encore le duopole de Cournot que l'on suppose répété une infinité de fois. La solution de collusion retenue est donnée par

$$q_1^c \ = \ q_2^c \ = \ 1/4 \ \text{ et } \ p^c \ = \ 1/2 \ \Rightarrow \ u_1' \ = \ u_2' \ = \ 1/8$$

tandis que la solution du jeu statique est

$$q_1^* \ = \ q_2^* \ = \ 1/3 \text{ et } p^* \ = \ 1/3 \ \Rightarrow \ u_1^* \ = \ u_2^* \ = \ 1/9.$$

A la période $t > 1$, la déviation optimale pour l'entreprise 1 lui assure un profit courant égal à $u_1^d = 9/64$ de sorte que le profit escompté de cette entreprise lorsqu'elle dévie est donné par

$$u_1^d \ + \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \delta^{\tau-t-1} u_1^*$$

qui est inférieur à $u_1'/(1-\delta)$ si et seulement si

$$(u_1^d - u_1') - \delta(u_1^d - u_1^*) < 0$$

où la dernière inégalité est satisfaite pour δ suffisamment grand puisque $(u_1^d - u_1^*) > (u_1^d - u_1')$. *La solution collusive du duopole de Cournot est donc un équilibre parfait* *du jeu répété*. Ce résultat est obtenu sans que les firmes ne cherchent à maximiser leurs profits joints comme elles le feraient dans le cas d'un accord de cartel.

Dans le cas d'un nombre fini de périodes, on a vue que le principe d'induction vers l'amont montre que la répétition de l'équilibre de Nash du jeu constitutif est le seul équilibre parfait lorsque le jeu constitutif admet un seul équilibre de Nash. Ce n'est plus nécessairement vrai lorsque le jeu constitutif possède plusieurs équilibres. A titre d'illustration, considérons l'exemple suivant dû à Friedman.

2 1	β_1	β_2	β_3	β_4
α_1	5,4	3,17	3,10	15,15
α_2	8,8	0,6	0,2	8,0
α_3	4,0	2,2	5,5	4,3
α_4	0,10	8,6	3,4	17,5

Le jeu statique possède deux équilibres en stratégies pures, à savoir (α_2, β_1) et (α_3, β_3) qui assurent des gains $(8, 8)$ et $(5, 5)$, respectivement. Toutefois, (α_1, β_4) domine strictement des équilibres du jeu statique. Montrons comment cette solution peut être soutenue comme un équilibre parfait du jeu répété un nombre fini de fois.

Supposons que ce jeu soit joué pendant $T > 1$ périodes et considérons la stratégie suivante pour le joueur 1(2):

(a) choisir $\alpha_1(\beta_4)$ à la période 0;

(b) choisir $\alpha_1(\beta_4)$ durant les période $t = 1...T-1$ si $\alpha_1(\beta_4)$ a été effectivement choisi durant chacune des périodes précédentes, et choisir $\alpha_3(\beta_3)$ à partir de $\tau + 1$ si un joueur dévie à la période τ;

(c) choisir $\alpha_2(\beta_1)$ à la période T si (α_1, β_4) a été choisi devant les périodes $t = 1 \cdots T-1$, et choisir $\alpha_3(\beta_3)$ à la période T sinon.

Cette paire de stratégies est bien un équilibre parfait si δ est suffisamment élevé. Sa raison d'être est que le jeu constitutif possède deux équilibres pour le jeu constitutif et que l'équilibre (α_2, β_1) est préféré à (α_3, β_3) par les deux joueurs. *La menace consiste donc à retourner à l'équilibre le moins favorable si l'un des deux joueurs dévie.* Cette menace reste crédible jusqu'à la dernière période. A la période T, il n'y a plus de possibilité d'exercer une menace. L'équilibre proposé est alors tel que les deux joueurs choisissent l'équilibre statique le plus favorable s'ils ont "coopérés" pendant toutes les périodes précédentes.